# Matemáticas aplicadas en arquitectura

## ALGUNOS PROBLEMAS

**Autor Responsable:**
Dr. Mario de Jesús Carmona y Pardo

FACULTAD ARQUITECTURA
DGTIC
dgapa
Dirección General de Asuntos del Personal Académico

# Matemáticas aplicadas en arquitectura

## ALGUNOS PROBLEMAS

Nombres: Carmona y Prado, Mario de Jesús, autor
Título: **Matemáticas aplicadas en arquitectura. Algunos problemas**
Identificadores: ISBN: 978-607-30-1520-2
PAPIME: PE 400516
Temas: Arquitectura–Teoría de la arquitectura | Matemáticas | Matemáticas aplicadas
Disponible en https://repositorio.fa.unam.mx
Primera edición: 2023



**EQUIPO EDITORIAL**

Coordinador editorial
**Lorenzo Rocha Cito**

RESPONSABLE DE DISEÑO EDITORIAL
**Amaranta Aguilar Escalona**

Edición
**Guadalupe Luna Rodríguez**
**Gil del Valle**

Diseño editorial y formación
**Lorena Acosta León**
**Samuel Morales**

Apoyo editorial
**Luis Alberto Castillo**
**Sara Campos Díaz**

**Agradecimientos**

Al Creador, autor de toda la Ciencia
Al Arq. Eduardo Marín Hernández
A la Arq. Laura Alejandra Escobedo Guzmán

**Dedicatoria**

A la M. en ARQ. María del Carmen T. Viñas y Berea
A la M. en D.A. y Arq. María del Carmen T. Carmona Viñas
Al M. en Urb. Arq. Leed Accredited Profesional BD+C Mario de Jesús Carmona Viñas
A: Fernanda, León Mario, María y Julia

# Prólogo

Marco Lucio Vitruvio Polion estableció tres principios ordenados sobre cómo debe de ser la arquitectura: *"Firmitas, Utilitas y Venustas"*; es decir: firme y duradera, útil o conveniente y bella o agradable.

Leone Battista Alberti dijo: "Yo voy a considerar arquitecto a aquel que, con método y procedimiento seguro y perfecto sepa proyectar racionalmente y realizar en la práctica, mediante el desplazamiento de las cargas y la acumulación y conjunción de los cuerpos, obras que se acomoden perfectamente a las más importantes necesidades humanas. A tal fin, requiere el conocimiento y el dominio de las mejores y más altas disciplinas. Así deberá ser el *arquitecto*".

Eugene Viollet-le-Duc estableció: "Arquitectura es el arte de proyectar y construir la vivienda humana".

Para mí, El arquitecto necesita evaluar las estructuras desde sus diseños preliminares, la topografía del terreno, las características del suelo, la geometría de su diseño, las instalaciones, la comparación de sistemas, las estimaciones, la administración y los costos, así como las factibilidades y los financiamientos.

Las matemáticas deben partir de lo intuitivo, de las ideas elementales y facilitar el diálogo inteligente entre el arquitecto y sus consultores.

Entonces las matemáticas que fundamentalmente debe conocer un arquitecto son: anitmética, álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial, cálculo integral y matemáticas financieras.

Es por ello que en este libro me permito hacer un recorrido por estos temas aplicándolos al ejercicio de la profesión y creando conciencia de la importancia de su estudio y aplicación desde los planes de estudios.

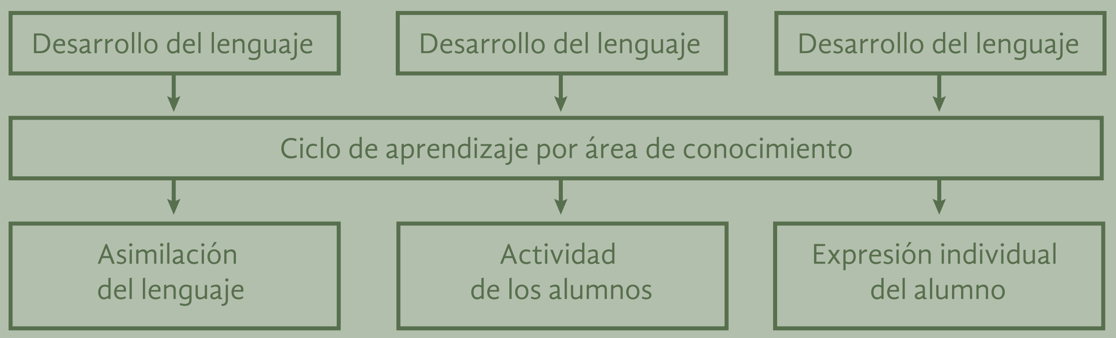
**EL AUTOR**

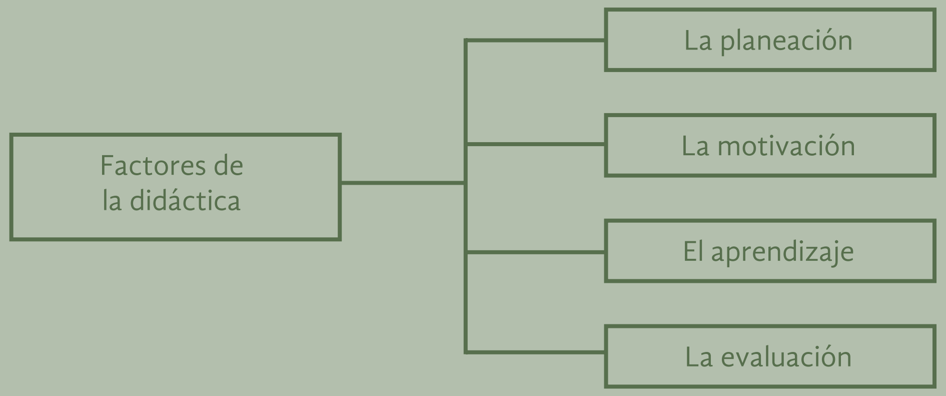
# Introducción

Toda ciencia en su relación con las matemáticas pasa por las siguientes cuatro fases:

- Empírica, cuando se cuentan los hechos.
- Experimental, cuando se los mide.
- Analítica, cuando se los calcula.
- Axiomática, cuando se los deduce.

Las matemáticas para los arquitectos no son un fin, sino son una herramienta que les permite ser ordenados y ejercitar su pensamiento. Si los arquitectos desean expresarse a través de formas estructurales con las instalaciones y los costos correctos, deben capacitarse primero para el uso de las herramientas del análisis cuantitativo sin llegar a demasiados manejos matemáticos.



## Modelo de planeación

| | |
|---|---|
| ¿Cuándo? → | Tiempo disponible |
| ¿Quién? → | Profesor-alumnos |
| ¿Para qué? → | Objetivos |
| ¿Qué? → | Contenidos de aprendizaje |
| ¿Cómo? → | Métodos, procedimientos y técnicas |
| ¿Con qué? → | Recursos |

## Modelo general para la solución de problemas

Para resolver un problema se requiere:

Comprenderlo
↓
Concebir un plan
(Alternativas de)
↓
Ejecutarlo
↓
Examinar la solución
(Visión retrospectiva)

Determinar la relación entre datos e incógnita

Considerar problemas similares obtener una idea de solución

# Comprenderlo

Ver claramente lo que se pide:

Incógnita → ¿Qué se pide? ¿Qué se quiere determinar? ¿Qué se busca?

Datos → ¿Qué elemntos se dan? ¿De qué se dispone? ¿Cuál es el orden de los datos?

Condición → Por medio de qué condición están relacionados la incognita y los datos

# Concebir una idea

Recurrir a experiencias o a conocimientos adquiridos con anterioridad

↓

Familiarización con el problema

↓

Problemas útiles

Muy relacionados con el nuestro, de cambio, modificación o transformación o problemas auxiliares

↓

Ligados al nuestro mediante: generalización, particularización, analogía, composición y descomposición del problema.

↓

Concebir un plan de acción para obtener la solución.

# Ejecutarla

Llevar a cabo el pan concebido

Requisitos

Conocimientos adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración y paciencia.

↓

Examen de los detalles para esclarecer todo.

↓

Asegurarse de la exactitud de cada paso.

↓

Esclarecer cada punto hasta que no quede.

↓

Solución:

Relación de la incógnita con los datos.

# Exáminar la solución

Realizar la visión restrospectiva:

Útil para consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas y para verificar resultados.

↓

Considerarla desde varios puntos de vista, reconsiderar los detalles de la solución verificando cada paso, meditar acerca de poder mejorarla en su conjunto, en su procedimiento o en su comprensión.

↓

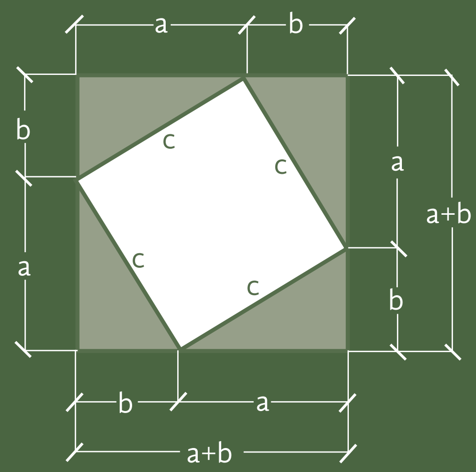
Adquirir una serie de conocimientos correctamente ordenados, útiles en cualquier momento para la solución de otros problemas.

# Contenido

# Capítulo 1

## PROPORCIONES

# Proporciones



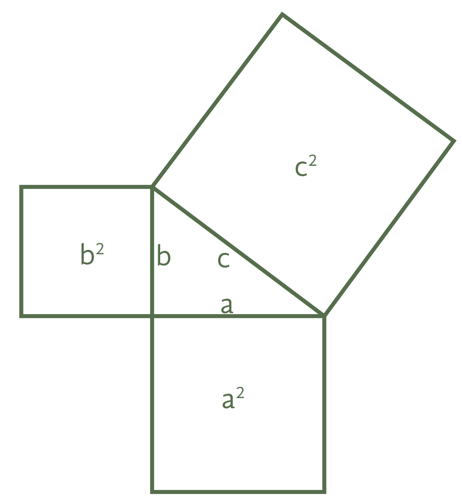

En ocasiones, he tenido la necesidad de analizar mis proyectos bajo un criterio de proporciones dentro del concepto arquitectónico. Esto se debe a que es una noción que he estado manejando en ciertos desarrollos. Así, desde hace tiempo he comenzado a manejar conceptos como los de Euclides, Fidias, Fibonacci, Le Corbusier, etcétera. Por ello, me parece interesante el exponerlos aquí.

Kepler, al referirse al estudio de las proporciones dijo: “La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro es la división de un segmento en razones extrema y media. El primero se puede comparar con una pieza de oro; al segundo lo podemos considerar una preciosa joya”. Sin duda se refería a Pitágoras y a Fibonacci.

# Teorema de Pitágoras

Recordemos el Teorema de Pitágoras:
"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

$$a^2 + b^2 = c^2$$

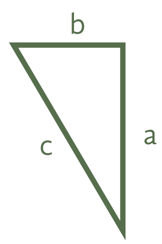



El área del cuadrado es

$$(a+b)^2$$

El área de cada uno de los 4 triángulos es ½(ab) y el área del cuadrado central $c^2$

O bien, visto de otra forma:




Ahora bien el área del cuadrado grande es igual a la suma de las tres partes que lo componen.

$$\left(a+b\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$2^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

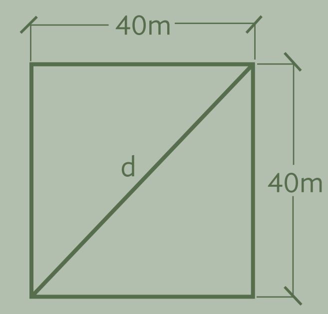
$$a^2 + b^2 = c^2$$

El enunciado del Teorema se puede cambiar de estas maneras: “En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto”, o bien: “En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos” y también “en todo triángulo rectángulo, un cateto es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto”.

Para fijar estos conceptos presento a continuación los siguientes ejercicios de aplicación.

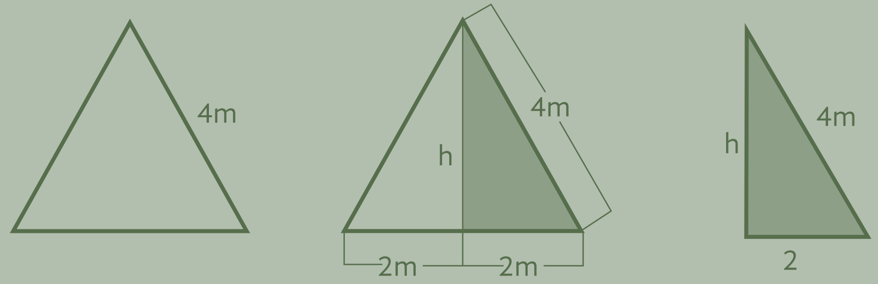
# Problemas

**Calcular la diagonal de un terreno de 40 m de lado**




$$40^2 + 40^2 = d^2$$
$$1600 + 1600 = d^2$$
$$3200 = d^2$$
$$d = \sqrt{3200} = 56.568m$$

**Calcular la altura de un triángulo equilátero de 4 m de lado.**




$$h^2 + 2^2 = 4^2$$
$$h^2 + 4 = 16$$
$$h^2 = 16 - 4$$
$$h^2 = 12$$
$$h = \sqrt{12} = 3.464$$

**Calcular la altura de un muro si se sabe que se requiere construir una rampa que tiene 6.8 m de largo y su proyección horizontal es de 6.00 m.**


$$(6.8)^2 = 6^2 + h^2$$
$$46.24 - 36 = h^2$$
$$10.24 = h^2$$
$$h = \sqrt{10.24}$$
$$h = 3.20m$$

# Sección áurea

Siguiendo este orden de ideas, y aplicando los conocimientos de Fibonacci, para un arquitecto es fundamental el uso de las proporciones, por ello, considero de importancia el tratar en este libro el tema obligado de la sección áurea.

**La proporción divina o el número de Oro**

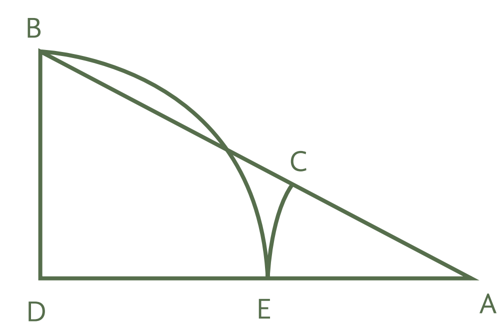
Se considera un rectángulo de base a y de altura b con proporción divina o áurea, si:

$$p(a,b) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

A este número se le llama de oro y generalmente se le simboliza con la letra griega $\pi$, como la inicial de Fidias, el escultor griego. Este número de oro se corresponde con la división áurea de un segmento o división en media y extrema razón.

**Analicemos este caso:**

Sea el siguiente triángulo rectángulo *ABD*. Haciendo centro en *D* y apoyando la punta en *B*, se define el punto *E* sobre el segmento *AD*. Luego, haciendo centro en *A* y apoyando la punta en *E*, se localiza el punto *C* sobre el segmento *AB*.



La relación entre *AC* y *BC* es la división del segmento *AB* en extrema y media razón.

Comprobémoslo matemáticamente:

Si el segmento *AB* pretende dividirse por un punto *C* de manera que:

*AB / AC = AC / BC*

Llamando *AC* = *a* y *BC* = *b*, resulta la relación: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

O bien, de una forma equivalente $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ ;

es decir, si hacemos $\frac{a}{b} = x$ quedará: $1 + \frac{1}{x} = x$

Por lo que $x^2 = 1 + x$ , es decir: $x^2 - x - 1 = 0$

Una ecuación de segundo grado que tiene como soluciones a las siguientes:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si aplicamos las dos soluciones, encontraremos que al considerar el signo menos se tiene:

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ < 0, lo que no puede ser la respuesta correcta,

entonces la solución correcta es: $x_2 = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \boxed{1.618}$

En un rectángulo de altura 1, su base debe medir 1.618 para que quede en proporción áurea.

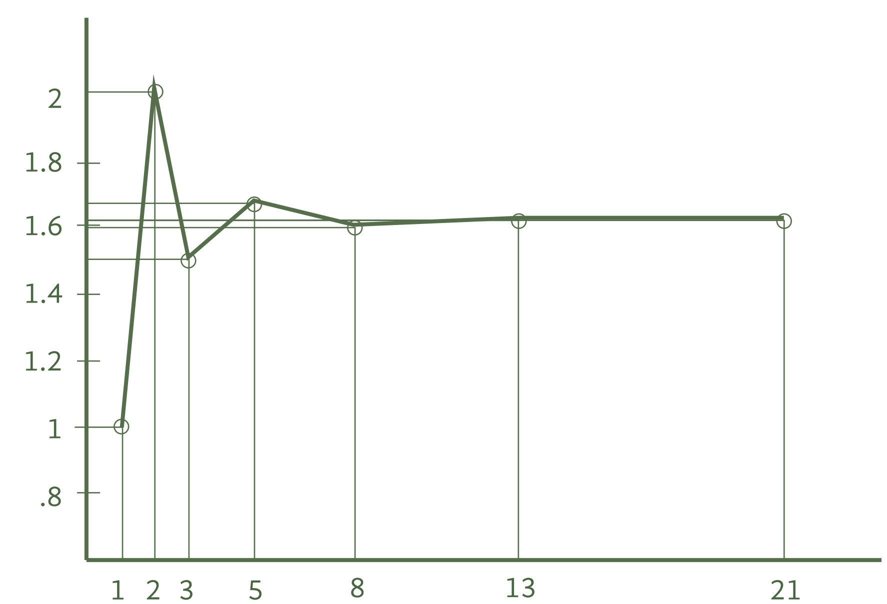
# Fibonacci

Fibonacci planteó una Serie que lleva su nombre y es así:

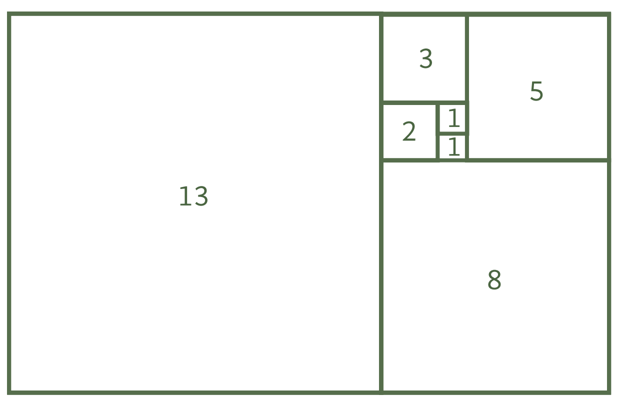
Se toman las razones de dos números sucesivos a partir de la unidad, repitiendo éste, sumando los dos y a esta suma se le agrega el número anterior y así sucesivamente, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...) y luego dividimos cada número entre su anterior y se consigue la siguiente serie:

$$\frac{1}{1}=1,\quad \frac{2}{1}=2,\quad \frac{3}{2}=1.5,\quad \frac{5}{3}=1.666,\quad \frac{8}{5}=1.6,\quad \frac{13}{8}=1.625,\quad \frac{21}{13}=1.61538,\ldots\ldots\frac{34}{21}=1.619$$

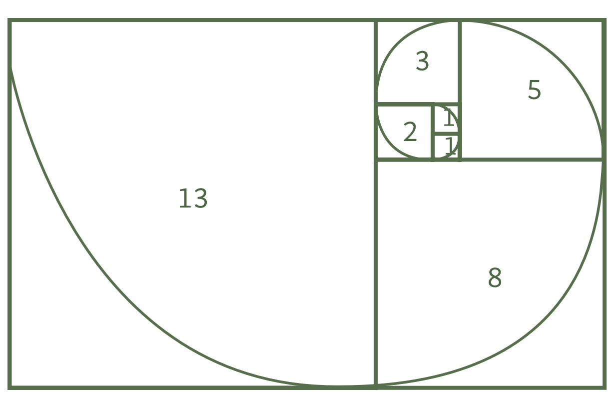
Si construimos una gráfica con esos valores se tiene:



Con ese mismo criterio, es decir, con la serie de números 1,1,2,3,5,8,13,21... Fibonacci planteó un crecimiento de rectángulos y de espirales que coinciden con la proporción dorada; recordemos cómo se construyen las figuras correspondientes:



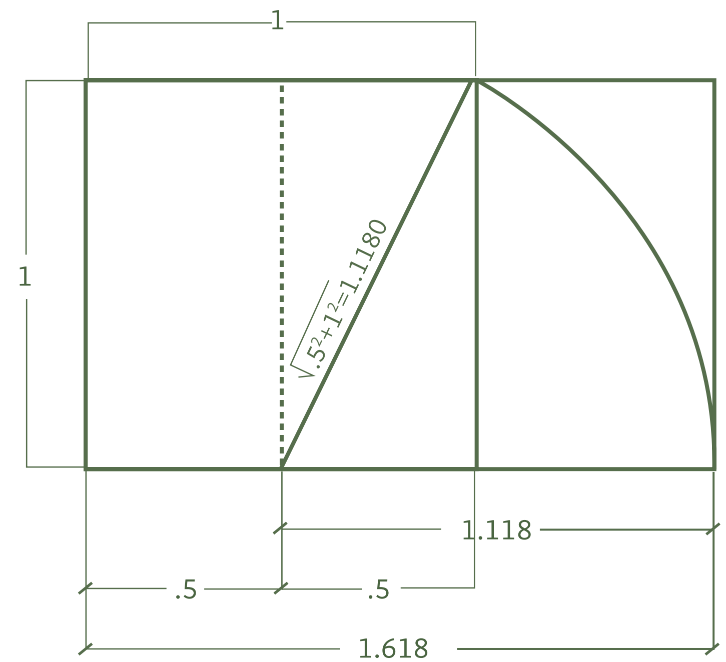

Con cuadrados




Con espiral

Ahora bien, para efectos prácticos, se puede obtener la sección áurea de la siguiente manera:

A partir de un cuadrado de 1 x 1, se divide la base a la mitad y de ese punto se traza una línea hasta el vértice superior del cuadrado, la cual, aplicando el Teorema de Pitágoras mide: $\sqrt{0.5^2+1.0^2}=1.1180$ , ahora, haciendo centro en el punto medio de la base del cuadrado se traza un arco de círculo hasta intersectarse con la prolongación de la base del cuadrado original y construyendo a partir de esa intersección un rectángulo de proporciones áureas: 1 : 1.618



# Capítulo 2

## TRIGONOMETRÍA Y SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS



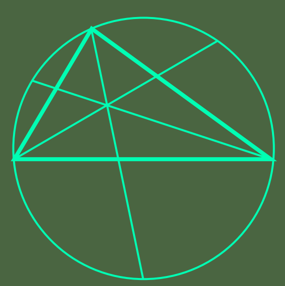
Índice

En la práctica profesional, en ocasiones nos vemos ante el problema de calcular distancias, pendientes, áreas, etcétera. Todo relacionado con la trigonometría. Resolvamos algunos problemas que nos acercan a la realidad práctica de su aplicación.

## Triángulos

### Mediatrices

Rectas que se trazan perpendiculares a cada lado a partir de su punto medio.
Su interferencia se llama circuncentro y coincide con el centro de la circunferencia que lo inscribe.



### Bisectrices

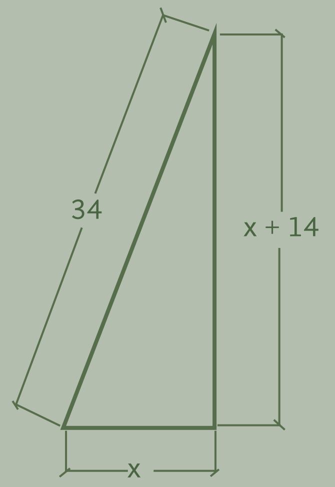
Recta que se traza desde un vértice a la mitad de un lado opuesto de la intersección de los focos se llama incentro o baricentro

### Alturas

Recta que se traza desde cada vértice perpendicular al lado opuesto que se supone base.
Su intersección se llama ortocentro.

# Problema

**Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 34.00 m, entonces debemos hallar las dimensiones de los catetos sabiendo que uno es 14.00 m mayor que el otro.**




Por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$x^2 + (x+14)^2 = (34)^2$$

Simplificando y resolviendo la expresión queda:

$$x^2 + x^2 + 28x + 196 = 1156$$

$$2x^2 + 28x - 960 = 0$$

$$x^2 + 14x - 480 = 0$$

Resolviendo la ecuación, nos queda:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 1920}}{2} = \frac{-14 \pm 46}{2} =$$

Buscando las dos raíces, tenemos:

$$x_1 = \frac{-14+46}{2} = \frac{32}{2} = \boxed{16}$$

$$x_2 = \frac{-14-46}{2} = \frac{-60}{2} = \boxed{-30}$$

Tomaremos la raíz positiva y desecharemos la negativa.

Base $x = 16$

Altura $y = 16 + 14 = 30$

Comprobando:

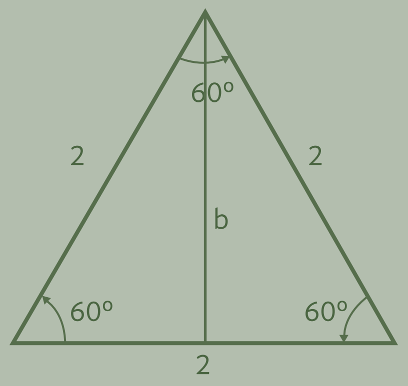
$$16^2 + 30^2 = 34^2 ; 256 + 900 = 1,156$$

# Problema

**Calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°**

## Construyamos las figuras correspondientes:

A partir de un triángulo equilátero de lado = 2, se divide a la mitad y su altura de llamará b.




Con la aplicación del teorema de Pitágoras que a la letra dice: “en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”, se tiene:

$$2^2 = 1^2 + b^2$$
$$4 = 1 + b^2$$
$$4 - 1 = b^2$$
$$b = \sqrt{3}$$
$$b = 1.732$$

Con estos datos, calculemos los valores de las funciones trigonométricas directas de un ángulo de 30°.

$$sen 30° = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\cos 30° = \frac{1.732}{2} = 0.866$$

$$\tan 30° = \frac{1}{1.732} = 0.577$$

Si recordamos que las funciones trigonométricas son recíprocas entre ellas, es decir, el seno es recíproco de la cosecante, el coseno lo es de la secante y la tangente de la cotangente, entonces se podrán calcular las otras tres funciones.

Creo conveniente recordar otro concepto fundamental, la definición de recíproco de un número "se llama recíproco de un número a otro que al multiplicarlo por el original da como resultado la unidad entera y positiva, o sea 1".

$$\cot 30° = \frac{1.732}{1} = 1.732$$

$$\sec 30° = \frac{2}{1.732} = 1.1547$$

$$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$$

Ahora, recordando también que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, podemos calcular las funciones de un ángulo de 60°:

$$sen30° = \cos(90° - 30°)$$

$$sen30° = 0.5$$

$$\cos 60° = 0.5$$

Análogamente, calculemos el valor de las funciones de 60°,

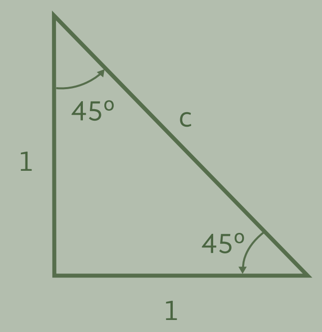
$$sen60° = \frac{1.732}{2} = 0.866$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\tan 60° = \frac{1.732}{1} = 1.732$$

# Problema

**Calcular las funciones trigonométricas directas para un ángulo de 45°.**




Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 1^2 = c^2$$

$$2 = c^2$$

$$c = \sqrt{2} = 1.4142$$

Ahora, las funciones correspondientes, serán:

$$sen 45° = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$

$$\cos 45° = \frac{1}{1.4142} = 0.7071$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

# Tríos de Pitágoras

Un trio de números enteros positivos (a, b y c) se dice que son pitagóricos si cumplen con la condición:

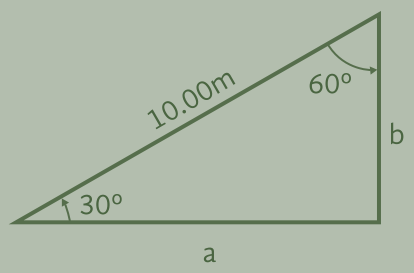
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Estos números sirven para construir triángulos rectángulos donde el mayor es la hipotenusa y los dos menores los catetos.

| a | b | c |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 5 | 12 | 13 |
| 8 | 15 | 17 |
| 7 | 24 | 25 |
| 20 | 21 | 29 |
| 12 | 35 | 37 |

# Problema

**Calcular cuánto miden los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 10.00 m, con ángulos de 30° y 60°.**




Para a, se tendrá:

$$\cos 30° = \frac{a}{10}$$

$$a = 10\cos 30° = 10(0.866) = \boxed{8.66m}$$

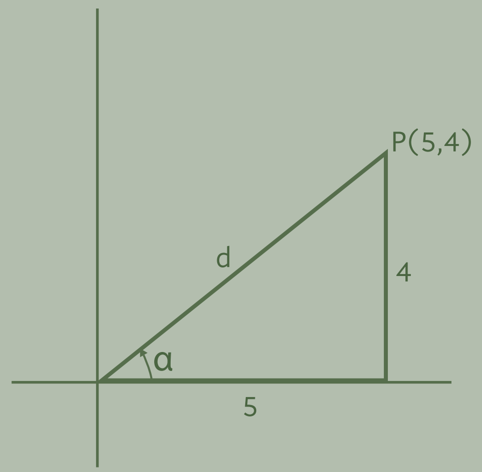
Para b, se tendrá:

$$sen30° = \frac{b}{10}$$

$$b = 10(sen30°) = 10(0.5) = \boxed{5.00m.}$$

# Problema

**Encontrar el valor del ángulo y el valor de la hipotenusa del triángulo que tiene como base 5 $ul$ y como altura 4*ul* (*ul* =Unidades Lineales).**




$$\tan\alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

Ahora, aplicando la función trigonométrica inversa, calculamos:

$$ang\tan 0.8 = 38.66° = \alpha$$

$$\alpha = 38°39'35''$$

Con este dato, se tendrá:

$$sen(38.66)° = \frac{4}{d}$$

$$d = \frac{4}{0.6246} = \boxed{6.40ul.}$$

Esta solución se puede comprobar analíticamente con la aplicación de fórmula para hallar la distancia entre dos puntos, a saber: *O* (0,0) y *P* (5,4)

$$d = \sqrt{(5-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = \boxed{6.40ul.}$$

# Problema

**Se tiene una rampa para estacionamiento con una inclinación o pendiente de 10%, calcular qué longitud tendrá su desarrollo para subir 3.20 m.**


Recordemos que al decir 10% de pendiente, estamos entendiendo que por cada metro de longitud sube 10 centímetros, entonces para este caso el ángulo que se genera será de:

$$\tan\alpha = \frac{0.10}{1} = 0.10$$

$$ang\ \tan 0.1 = 5.71°$$

Ahora bien:

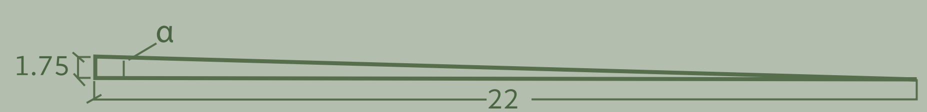
$$\tan 5.71° = \frac{3.2}{b}$$

$$b = \frac{3.2}{0.1} = \boxed{32.00m.}$$

# Problema

**Se requiere subir 1.75 m, y se dispone de una longitud de desarrollo de 22.00 m.**

**¿Qué porcentaje tendrá la rampa y que ángulo de inclinación tendrá?**




Sea determinar el porcentaje de inclinación $P = \frac{1.75}{22.00} = 0.0795$ es decir 7.95%

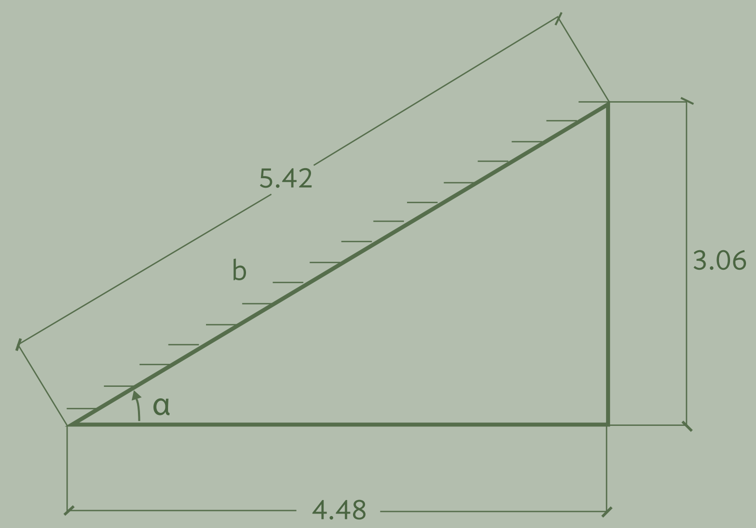
El ángulo que tendrá será $\tan\alpha = \frac{1.75}{22.00} = 0.0795$ , luego *ang tan* 0.0795= 4.45°

= 4° 32´ 43´´ y la longitud de la rampa será de $sen 4.45° = \frac{1.75}{l}$

Por lo que $l = \frac{1.75}{0.0776} = 22.55m$

# Problema

**Se tiene una escalera de 17 peraltes de 18 cm cada uno y las huellas de 28 cm cada una, se requiere conocer la inclinación de la rampa y la longitud de esta.**




Longitud = 16 huellas x 28 cm = 4.48 m

Altura = 17 peraltes x 18 cm = 3.06 m

Inclinación:

$$\tan\alpha = \frac{3.06}{4.48} = 0.6830$$

$$ang \tan 0.6830 = 34°20'04''$$

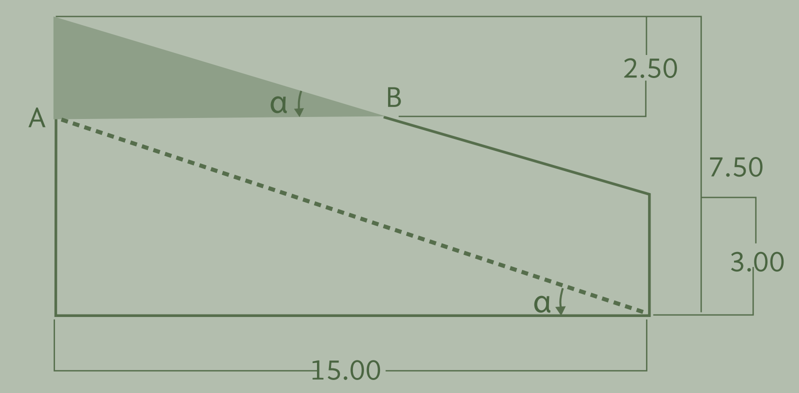
Longitud de la rampa:

$$sen 34.33° = \frac{3.06}{l}$$

$$l = \frac{3.06}{0.5640} = 5.42m.$$

# Problema

Se tiene el caso de un terreno con cierta pendiente descendente, el cual es necesario terracear para definir los niveles de piso, por ello se requiere calcular una medida, pero sólo se tienen algunos datos proporcionados por el levantamiento topográfico, ver la figura siguiente:




$$\tan\alpha = \frac{8.60 - 2.70}{30.00} = \frac{5.90}{30.00} = 0.20$$

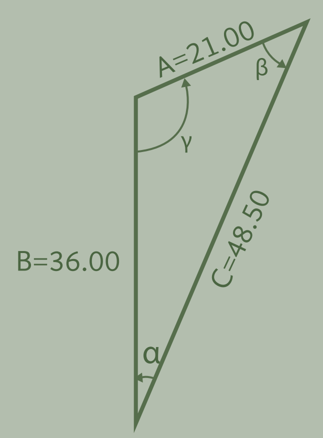
$$ang\ \tan 0.20 = 11.3099°$$

$$\tan\alpha = \frac{2.50}{x}$$

$$x = \frac{2.50}{\tan\alpha} = \frac{2.50}{0.20} = \boxed{12.50ml.}$$

# Problema

**Se tiene un terreno de forma triangular y se conocen las medidas de sus linderos, sin embargo hace falta averiguar cuánto tienen los ángulos internos de dicho lote.**




Para la solución se puede utilizar el teorema de los cosenos en virtud de que se trata de un triángulo cualquiera.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{(36)^2 + (48.50)^2 - (21)^2}{2(36)(48.50)} = \frac{3207.25}{3492} = 0.9185$$

$$ang\cos 0.9185 = \boxed{23°17'31''}$$

Ahora calculemos otro ángulo, por ejemplo

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} = \frac{(21)^2 + (48.50)^2 - (36)^2}{2(21)(48.50)} = \frac{1497.25}{2037} = 0.7350$$

$$ang\cos 0.7350 = 42.6905° = \boxed{42°41'25''}$$

Ahora bien, como sabemos, los ángulos internos de un triángulo suman 180°, por lo que, sumando los dos ángulos calculados y restando esta suma de 180° se tendrá el ángulo obtuso que nos falta.

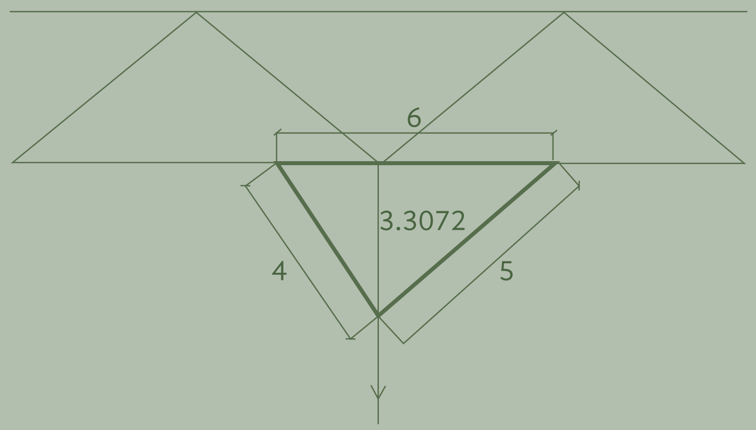
$$23°17'54" + 42°41'25" = 65°59'19"$$

$$179°59'60" - 65°59'19" = \boxed{114°41"}$$

# Problema

**Se tiene una estructura espacial que salva un gran claro en una sección de ésta, cuyos nodos están separados 6.00 m.**

**Se ha diseñado una estructura triangular que soportará una lámpara; si la base del triángulo suspendido de la estructura espacial tiene 6.00 m y los lados tienen unas longitudes de 5.00 y 4.00 m, se requiere saber el ángulo que forman entre sí las barras y la altura del vértice bajo el plafón para suspender la lámpara.**




En este caso, como se conoce el valor de los lados del triángulo, se puede aplicar el teorema de los cosenos para averiguar el ángulo entre las barras y con ese dato calcular la longitud buscada.

Si a = 5.00m., b = 4.00m. y c = 6.00m. y α el ángulo entre las barras a y b, entonces tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

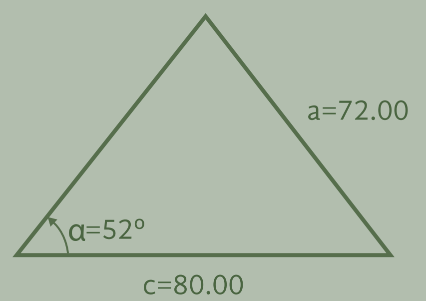
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(4)^2 + (6)^2 - (5)^2}{2(4)(6)} = 0.5625$$

$$ang\cos 0.5625 = 55.7711° = \boxed{55°46'12"}$$

$$sen 55.77° = \frac{altura}{4.0}$$

$$altura = 4 sen 55.77° = (0.8268)4 = \boxed{3.3072m.}$$

**Se tiene un terreno de forma triangular, se conocen dos de sus lados y uno de sus ángulos interiores, se requiere conocer la longitud del lado que falta, así como los otros dos ángulos interiores y el área total del predio.**




El lado a = 72m, lado c = 80m y el ángulo α = 52°
En virtud de que se conocen 2 de los lados y un ángulo, se puede utilizar la ley de los senos y así calcular el valor de otro ángulo.

$$a = \frac{c}{sen\gamma}(sen\alpha)$$

$$sen\gamma = \frac{c}{a} sen\alpha$$

$$sen\gamma = \frac{80}{72}(sen52°) = 1.1111(0.7880) = 0.8756$$

$$\gamma = angsen0.8756 = 61.1112° = \boxed{61°6'40"}$$

Ahora, sumando los dos ángulos que ya conocemos y restando esta suma de 180°, determinaremos el valor del ángulo que falta:

$$52° + 61°6'40" = 113°6'40"$$

$$179°59'60" - 113°6'40" = \boxed{66°53'20"} = \beta$$

Para calcular el lado b, se tiene por la ley de los senos:

$$b = \frac{72.00}{sen52°}(sen66°53'20") = \frac{72.00}{0.7880}(0.9197) = \boxed{84.0342m}$$

Para determinar la altura se tiene:

$$sen61.1112° = \frac{altura}{72}$$

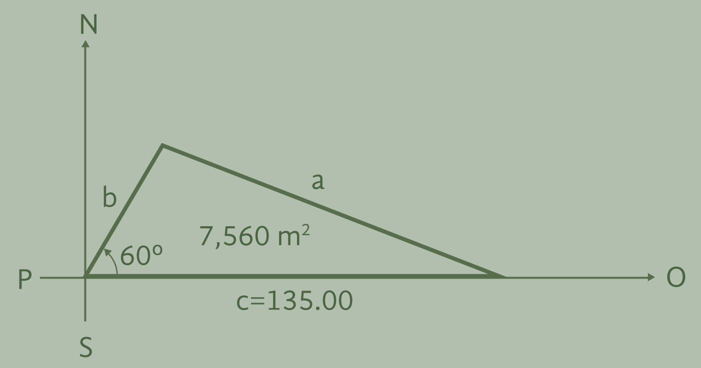
$$altura = 72(0.8756) = \boxed{63.0402m.}$$

Y entonces la superficie buscada es:

$$S = \frac{80.00(63.0402)}{2} = \boxed{2,521.61m^2}$$

**Se tiene un terreno plano de forma triangular, que tiene un área de 7,560.00 , uno de sus lados medido a partir del origen de coordenadas tiene dirección nororiente y forma un ángulo de 60° con otro de sus lados que está en dirección oriente, el cual mide 135.00 m y el último de los lados opuesto al ángulo de 60° tiene su dirección en sentido norponiente (Notación de rumbos).**

**Se requiere conocer las dimensiones de los dos lados desconocidos y los dos ángulos que faltan de definir.**




Utilizando los conocimientos de trigonometría, calcularemos el lado b con base al área y al ángulo que conocemos:

$$A = \frac{1}{2} bc sen\alpha$$

$$b = \frac{2A}{c sen\alpha} = \frac{2(7560)}{135 sen 60°} = \frac{15120}{135(0.866)} = \boxed{129.33 m.}$$

Ahora, con el teorema de los cosenos calculemos la medida del lado a:

$$a^2 = (129.33)^2 + (135)^2 - 2(129.33)(135)(\cos 60°) = 16,726.24 + 18,225 - 17,459.55 = 17,491.69$$

$$a = 132.256 m.$$

Con el teorema de los senos calcularemos el ángulo $\beta$:

$$a = \frac{b}{sen\beta}(sen\alpha)$$

$$sen\beta = \frac{b}{a}(sen 60°) = \frac{129.33}{132.256}(0.866) = 0.8468$$

$$\beta = angsen 0.8468 = 57.8653° = \boxed{57°51'55''}$$

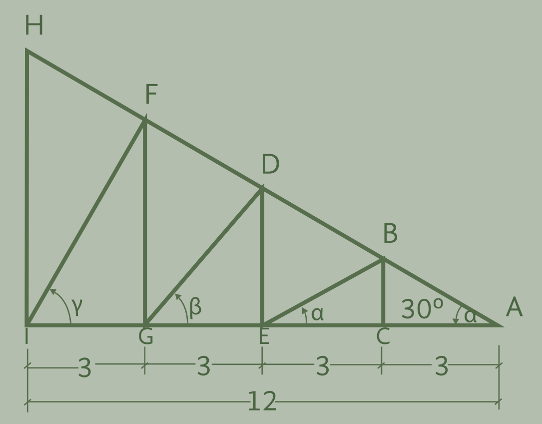
Ahora, el ángulo $\gamma$:

$$60° + 57°51'55'' = 113°51'55''$$

$$179°59'60'' - 113°51'55'' = \boxed{66°8'5''}$$

# Problema

**Se tiene una armadura como la de la figura siguiente, sin meterse a problemas de cálculo de estructuras, se requiere determinar todos los ángulos que forman las barras y sus longitudes, para poder dibujarlas con dimensiones correctas.**




Recordando que la longitud de un segmento de recta es el producto de otro segmento por el coseno del ángulo que forman, tendremos:

$$AB\cos 30° = 3$$

$$AB = \frac{3}{\cos 30°} = \frac{3}{0.866} = \boxed{3.4641m}$$

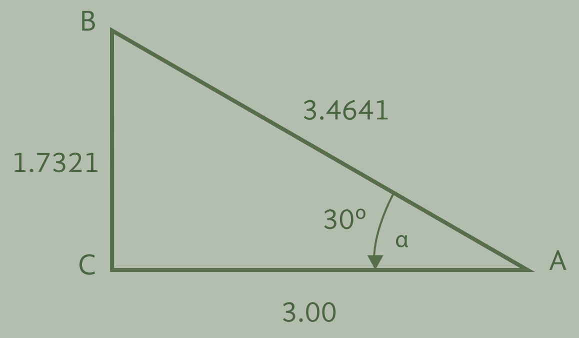
Ahora, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(3.4641)^2 = (3)^2 + (BC)^2$$

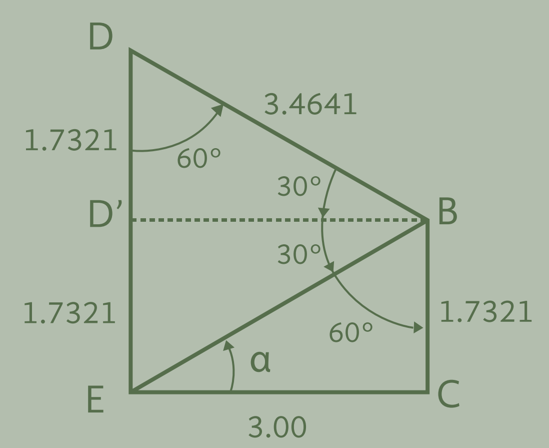
$$12 = 9 + (BC)^2$$

$$3 = (BC^2)$$

$$BC = \sqrt{3} = \boxed{1.7321m.}$$

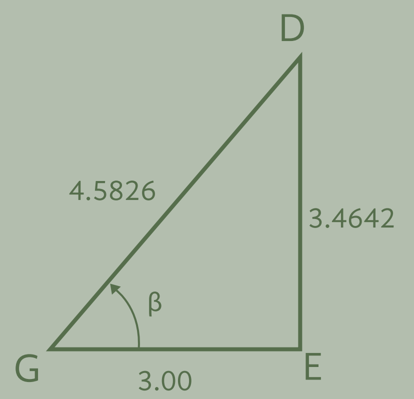


Por relación de proporciones, *AB* = *BD* = *BE*, si trazamos por *B* una línea horizontal hasta *DE*, encontraremos en su intersección el punto *D´* y por geometría observamos que el ángulo en el vértice *B* en relación a *BD´* es de 30°, por lo que el ángulo en el vértice *B* es de 60°, entonces, la proyección de *BD*, será:




$DD' = 3.4641\cos 60° = 3.4641(0.5) = 1.7321$, ahora bien, como *D´E* = *BC*, se tiene que finalmente $\boxed{DE = 3.4642m.}$

Analizando ahora el triángulo *EDG*, tendremos:




Por Pitágoras $(3.4641)^2 + (3)^2 = (DG)^2$, y $12 + 9 = (DG)^2$, por lo que

$$DG = \sqrt{21} = \boxed{4.5826m.}$$

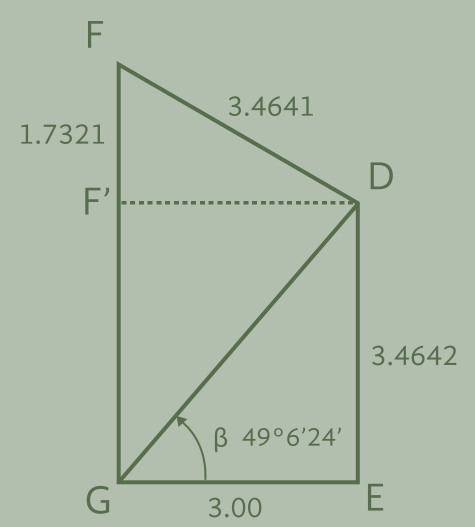
El ángulo $\beta$, lo obtendremos de la siguiente forma:

$$4.5826\cos\beta = 3$$

$$\cos\beta = \frac{3}{4.5826} = 0.6547$$

Luego $\beta = 49.1069° = \boxed{49°6'24''}$

La longitud de la barra *FG*, la podemos obtener de la siguiente manera, observemos el croquis:




Si por *D*, trazamos una horizontal hasta *FG*, encontraremos en la intersección el punto *F´*, con la proyección vertical de *DF*, se tiene que mide 1.7321 m., entonces,

$$FG = FF' + F'G = 1.7324 + 3.4642 = \boxed{5.1963m}$$

El siguiente paso es calcular la longitud de la barra *FI*, que por Pitágoras da:

$$(GI)^2 + (FG)^2 = (FI)^2$$

$$(3)^2 + (5.1963)^2 = (FI)^2$$

$$FI = \sqrt{9+27} = \boxed{6.00m.}$$

Ahora, el ángulo $\gamma$:

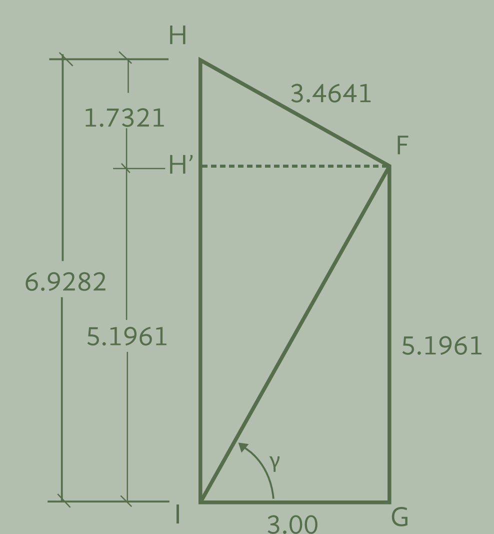
$$\cos\gamma = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$ang\cos 0.5 = 60°$$

Y finalmente la altura *HI*:

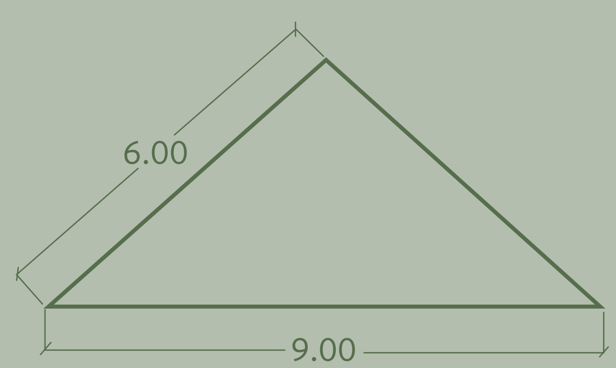
$$HH' = 1.7321 \text{ y } H'I = 5.1963$$

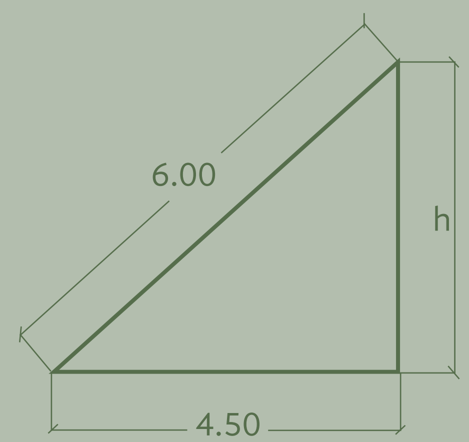
Entonces $HI = 1.7321 + 5.1963 = \boxed{6.9284m.}$



**Una techumbre a dos aguas, salva un claro de 9.00 m, a partir de la cumbrera se inclina simétricamente, cada pendiente con una longitud de 6.00 m cada una.**

**Se requiere saber cuál es la inclinación del techo y cuál es la altura que se le debe dar a la cumbrera con respecto a la base de dicha techumbre.**




$$\cos\alpha = \frac{4.5}{6.0} = 0.75$$

$ang\cos 0.75 = 41\ 24'34'$ Que es el ángulo que se busca.

$$6^2 = 4.5^2 + h^2$$

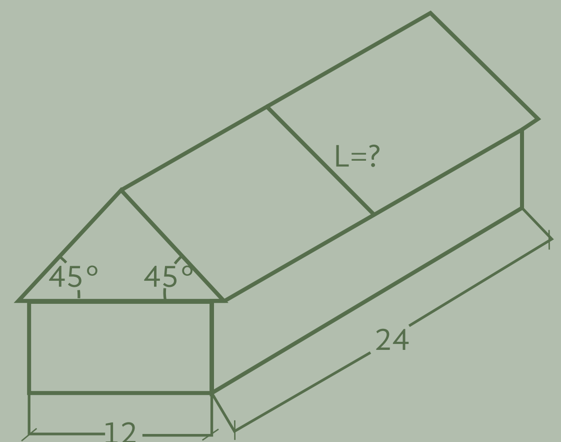
$$36 - 20.25 = h^2$$

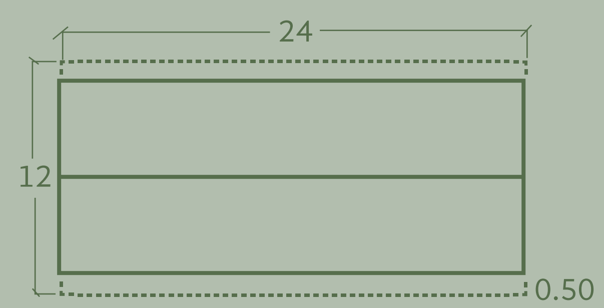
$$15.75 = h^2$$

$$h = 3.9686 mt.$$

Que es la altura de la cumbrera a partir de la base de la techumbre.

**Una construcción destinada a granero tiene 24.00 m de largo por 12.00 m de ancho y tiene una cubierta simétrica, a dos aguas y éstas tienen una inclinación de 45°.**




Se requiere conocer la longitud de las vigas para diseñarlas y el área del techo para adquirir la madera y la teja necesarias para la cubierta, se sabe que la proyección horizontal del volado es de 0.50 m.

$$L\cos 45 = 6.50$$

$$L(0.7071) = 6.50$$

Por lo que la longitud de las vigas será de:

$$L = \frac{6.50}{0.7071} = 9.1925mt$$

Luego, la superficie buscada de la techumbre es de:

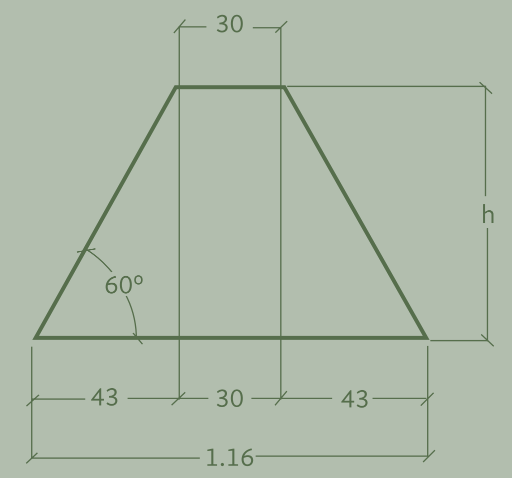
$$9.1925(24)(2) = 441.23m^2$$

**Cómo determinar ancho de la base, peralte y volumen para una zapata corrida de mampostería de piedra braza, si después de bajar cargas encontramos que se tiene una carga uniformemente repartida *w = 4,600 k/ml* y que el terreno tiene una resistencia *τ= 5,000 kg/m²*.**

Debemos hacer un primer tanteo, sin tomar en cuenta el peso propio del cimiento:

Ancho de la base = $\frac{P}{\tau} = \frac{4,600kg/ml}{5,000kg/m^2} = 0.92m$

Ahora, conociendo que se requieren 92 cm de base sin haber tomado en cuenta el peso propio, debemos suponer un ancho ligeramente mayor para tomar en cuenta ese peso y proporcionar nuestra zapata. Para este caso supondremos un ancho de 1.16 m.




Datos:

Corona = 30 cm.

Base = 116 cm.

Escarpio = 60º

Para determinar la altura o el peralte h de la zapata se tiene:

$$\frac{hcm}{43cm} = \tan 60$$

*h* = 43 tan 60º = 43 (1.73) = 74.39 cm., redondeando tomaremos *h* = 75 cm.

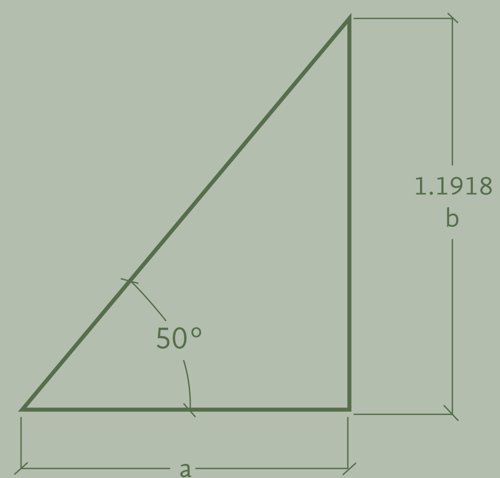
Si la piedra ya mamposteada pesa 2,220 kg/m³, se tendrá que el peso del cimiento en un metro lineal será:

*Pc* = Área del trapecio por un metro de largo y por el peso volumétrico

$$Pc = \left(\frac{0.30 + 1.16}{2}\right)(0.75)(2220) = 1,215.45 \text{ kg/ml}$$

Redondeando, *Pc* = 1,220.00 kg/ml.

**Se tiene que trazar en una obra un ángulo de 50 grados, no se cuenta con transportador, ni con aparatos especializados de topografía, únicamente se tiene una calculadora científica.**
**¿Qué se puede hacer para realizar el trazo?**




Se construye en el suelo una línea con 1.00 m de largo y basándonos en nuestros conocimientos de trigonometría, aplicamos la expresión que identifica a la tangente de un ángulo.

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$b\tan\alpha = a$$

Como el ángulo buscado es 50° y la longitud del segmento trazado es de 1.00 m, sustituyendo, se tiene:

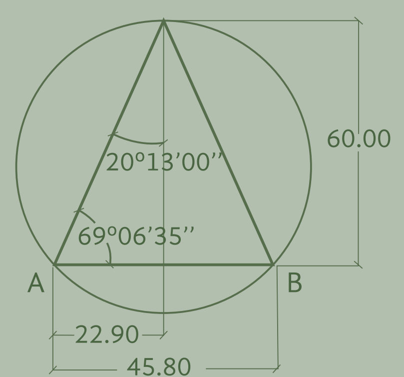
$$b\tan 50 = a$$

$$\tan 50\,(1) = a$$

Si buscamos ahora en la calculadora la tangente de 50°, se tiene:
1.1918 = *a*, con lo que podemos trazar perpendicularmente a la recta de 1.00 m, otro segmento de 1.1918 m y, al unirlos formando un triángulo rectángulo, habremos trazado el ángulo buscado.

**Para hacer un trazo en un plano, se requiere inscribir un triángulo en un círculo y obtener los valores más relevantes.**

**Un segmento horizontal $\overline{AB}$, mide 45.80 m, su mediatriz mide de 60.00 m. Cómo hallar los valores de los ángulos internos del triángulo y el valor del radio del círculo que inscribe al triángulo dado.**




$$\tan A = \frac{60}{\frac{45.80}{2}} = \frac{60}{22.90} = 2.6201$$

$$ang\tan 2.6201 = 69.1099$$

$$\boxed{A = 69\ 06'35''}$$

Recordando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre = 180°, tendremos que:

$$180 = 90\ \ + 69\ 06'35'' + \beta$$

$$\beta = 180° - (90\ \ + 69°06'35'') = 20°13'$$

Hipotenusa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si: $a = 22.90$ y $b = 60.00$, se tiene: $(22.90)^2 + (60.00)^2 = c^2$

Despejando, queda:

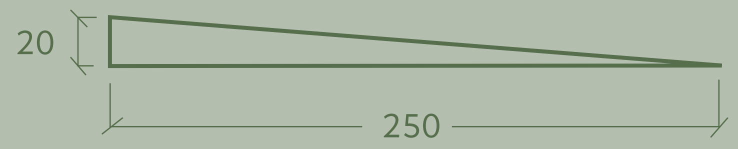
$$c^2 = 524.41 + 3600.00$$

$$c^2 = 4{,}124.41$$

$$\boxed{c = 64.22m}$$

**Para determinar el porcentaje de inclinación de una rampa debemos considerar la expresión:**

$Z = \frac{x}{y}$




**Donde:**

Z = pendiente

Y = longitud

x = altura

Si la altura x = 20 cm, la longitud y = 250 cm, entonces la pendiente $Z = \frac{x}{y} = \frac{20}{250} = 0.08$, es decir, la pendiente es del 8%.

# Elementos de un polígono regular

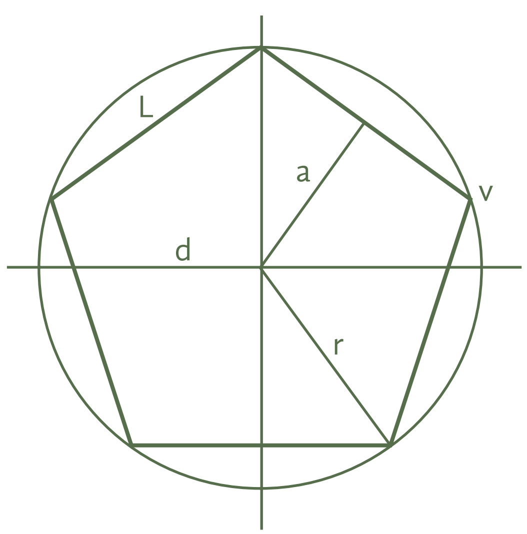
**L** Lado de la figura
**v** Vértice de la figura
**c** Centro de la figura
**r** Radio (distancia del centro de un vértice )
**a** Apotema segmento perpendicular a un lado
**d** Diagonal entre dos vértices lineales
**P** Perímetro

$\Sigma\beta = 180°(n-2)$ ∑ De ángulos externos

$\Sigma\beta = \pi(n-2)$ $\Sigma\gamma = 360º$

$r = \dfrac{360º}{n}$ $\Sigma\gamma = 2\pi$

$r = \dfrac{2\pi}{\pi}$



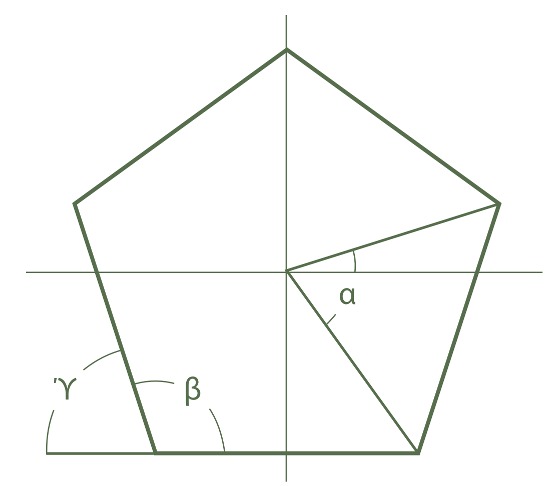

En un polígono regular

$\alpha = \dfrac{360°}{n}$

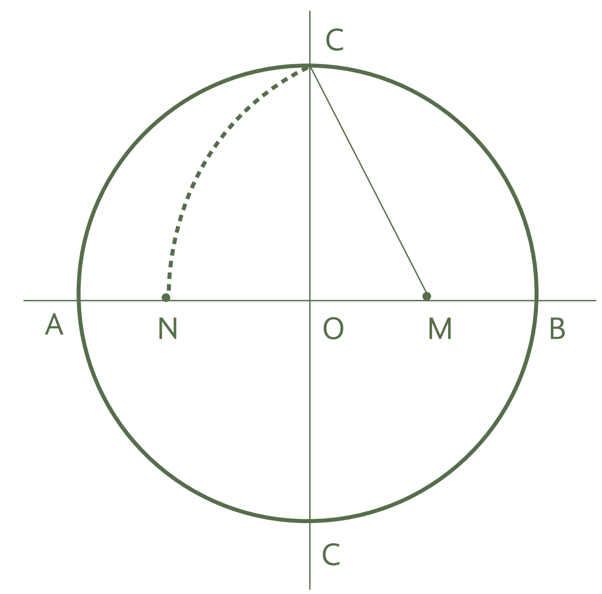
$\alpha = \dfrac{2\pi}{\pi}$

$\beta = 180°\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$

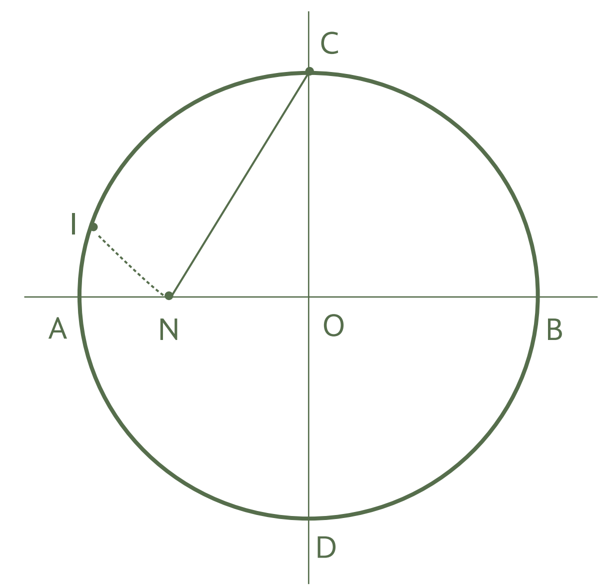
$\beta = \pi\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$



# Cómo se traza un pentágono inserto en una circunferencia




1. Se traza una circunferencia con el radio que uno quiera
2. Se termina el punto ***M*** (punto medio de ***OB***).
3. Haciendo centro con un compás en ***M*** con radio ***CM*** se traza el punto ***N***
4. Haciendo centro en ***C*** y radio ***CN*** se encuentra el punto (primer vértice del pentágono).
5. Haciendo centro en  y con el compás a la misma distancia ***CN*** se traza sobre la circunferencia el punto ***Z*** y así sucesivamente.



Ahora bien, aplicando trigonometría se tiene que los ángulos internos de un pentágono mide 180º y la suma total de sus ángulos internos mide 540º.

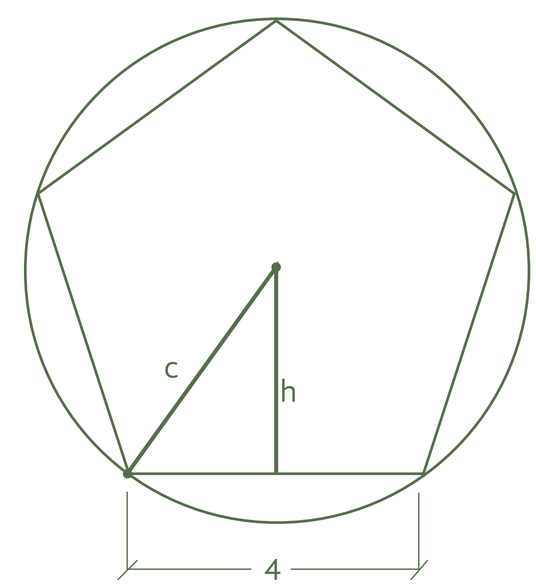
Si tomamos la mitad de 108º obtenemos 54º y la tan de 54º= 1.376

Si determinamos que el lado del pentágono mida tendremos que la altura desde un lado del pentágono hasta el centro de la circunferencia que lo inscribe será:

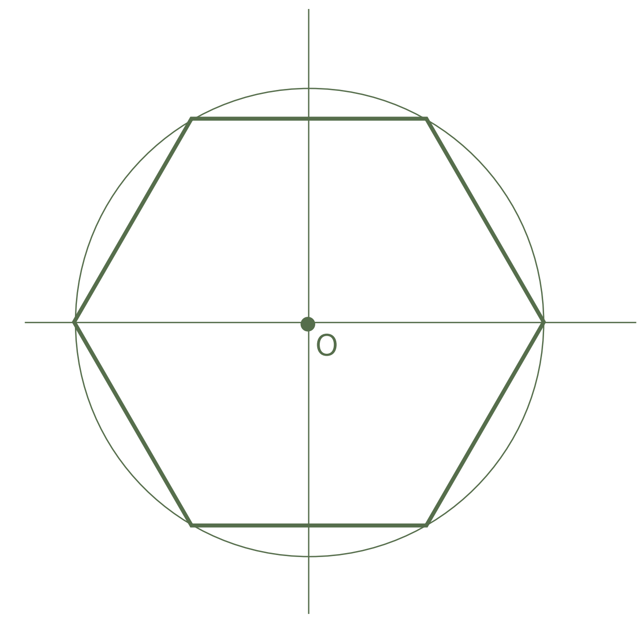
$$h = \frac{a\left(\tan 54°\right)}{2} = \frac{4\left(1.376\right)}{2} = 2.752ul$$

Ahora, para calcular el radio de la circunferencia que inscribe, se tiene:

$$sen54° = \frac{2.752}{r} \;\; ; \;\; r = \frac{2.752}{sen54°} = \frac{2.752}{0.8090} = 3.401ml$$



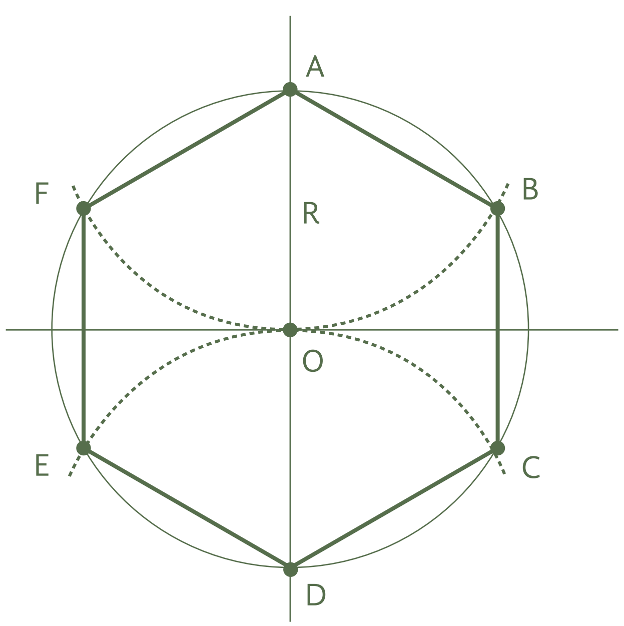
# Para construir un hexágono




Para construir un hexágono hay que recordar que el radio de la circunferencia que se determina es igual a un lado de la figura.

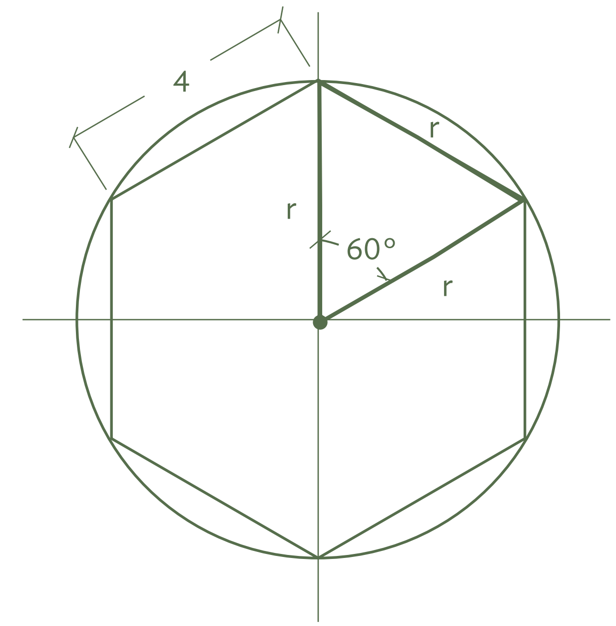
Una vez determinado el radio de la circunferencia deseada, se traza éste.

Haciendo centro en ***A*** y con el radio r se traza una curva que intersecte a la circunferencia y se obtienen los puntos ***B*** y ***F*** y analógicamente haciendo centro en ***D*** se traza otro trazo de curva intersectando en la circunferencia inicial y se determinan los puntos ***C*** y ***E*** se unen los puntos y se traza la figura.



### Aplicando triconometría

Si establecemos que la figura tendrá cada lado de 4*ul* y tiene 6 caras, la distancia desde el centro de la circunferencia a cada vértice será igual al radio y cada cara será en longitud igual al radio por formarse triángulos equiláteros.



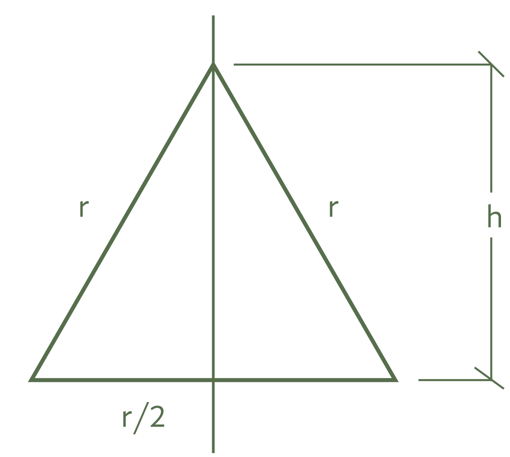

Si sabemos que en cualquier triángulo equilátero la altura es igual a la mitad de radio por la raíz cuadrada de tres, se tiene:

$h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ ; sustituyendo $h = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 3.464$

El ángulo interior en cada vértice es de 120° su mitad son 60°, entonces:

$$sen60° = \frac{3.464}{r}$$

$$r = \frac{3.464}{sen60°} = \frac{3.464}{0.866} = 4ml$$




Comprobando que el radio de la circunferencia que interviene al hexágono.

# Para construir un heptágono

Para construir la figura de un heptágono hay que recordar algunos conceptos, tales como

$$A = 3.6341\ L^2$$

En donde *A* es el área y *L* la longitud de un lado.

La suma de los ángulos interiores de un heptágono es de 900º, el valor de un ángulo interior es de $\frac{900}{7} = 128.57$ , el ángulo central mide $\frac{360°}{7} = 51.43°$

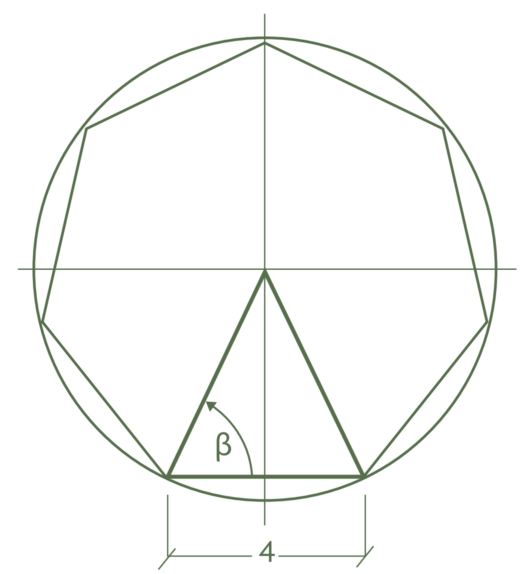
La mitad de un ángulo interior es $\frac{128.57°}{2} = 64.285°$ si establecemos que cada cara mida 4*ul* y que 128.57º equivalen a 128º 30’ 123’ , la realidad son 64º 17’ 6”=*B*, calculando él sen de *B* se tiene tan 64º 17’ 6”=2.0765, entonces

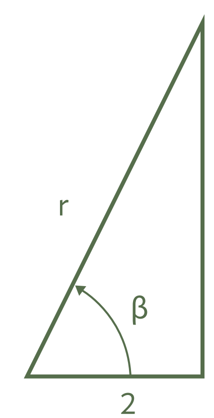
$$h = \frac{4(2.0765)}{2} = 4.153ul$$

El $sen 64°\ 17'\ 6" = \frac{4.153}{r} \ \therefore\ r = \frac{4.153}{sen\ 64°\ 17'\ 6"}$

$$r = \frac{4.153}{0.9009} = 4.6098ml$$

Si se sabe el valor de radio y la longitud de un lado, se puede trazar la figura correspondiente; si se quiere el lado e base se traza horizontal y de ahí se parte para dar pasos de compas de 4*ul* hasta formar el heptágono.



# Para construir un octágono

En el octágono la suma de sus ángulos internos es de 1080, el valor de cada ángulo interior es de 315º. Entonces el valor del ángulo central es de 45º.

Para trazar la figura se puede se puede partir de un vértice tomando en cuenta que:

El ángulo en el vértice *A* es de 135º, luego la mitad es de 67.5º (67º 30’) y suponiendo como en la ejecución anterior que la cara o lado midan 4*ul*.
se tiene:

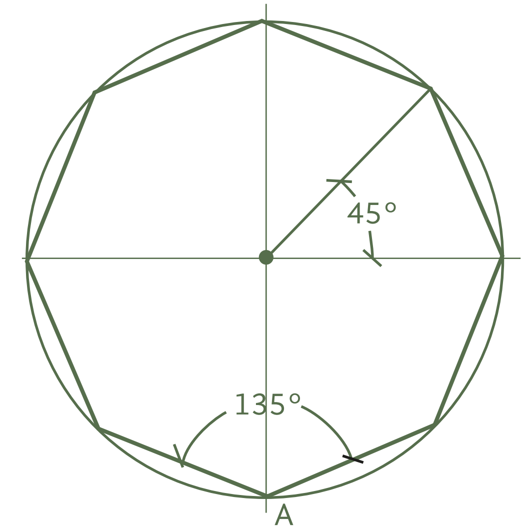
*tan* 67º 30= 2.4142 Entonces

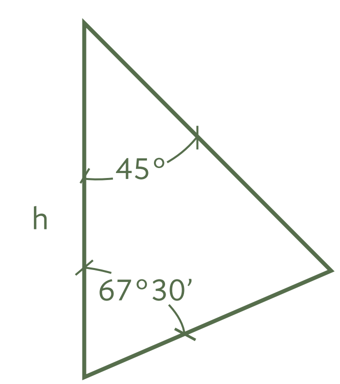
$$h = \frac{4\left(\tan 37°30'\right)}{2} = \frac{4\left(2.4142\right)}{2} = 4.828ul$$

Ahora bien, el $sen 67°30' = \frac{4.828}{r}$

Por lo que $r = \frac{4.828}{sen 67°30'} = \frac{4.828}{0.9238} = 5.226ul$

Que es la mitad de radio de la circunferencia que inscribe al octágono de lado igual a 4*ul*.



# Para construir un nonágono o eneágono

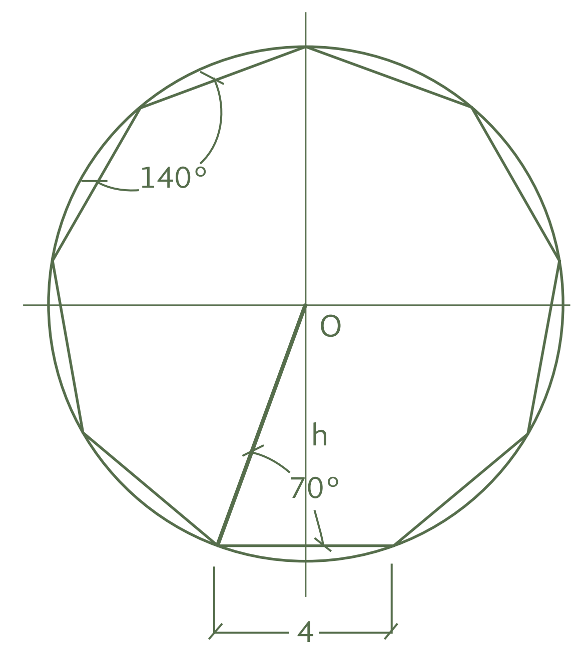
La suma de los ángulos internos de un nonágono es de 1260º, cada ángulo interno mide $\frac{180°(n-2)}{n}$ que en nuestro caso es $\frac{180°(9-2)}{9}=140°$ y la mitad de su ángulo interno es de 70º para su trazo es necesario conocer la medida del radio de la circunferencia que lo inscribe ahora, sabiendo que el lado mide 4*ul* se tiene:

*tan* 70º= 2.7474

$$h=\frac{4(2.7474)}{2}=5.495ul$$

$$con \quad sen70^{\circ}=\frac{5.495}{r} \quad ; \quad r=\frac{5.495}{sen70^{\circ}}$$

$$r=\frac{5.495}{0.93969}=5.8476ul$$




Conociendo el valor del radio y la dimensión de un lado se traza la circunferencia y el lado de 4*ul* como base y con un compás se miden las distancias de cada lado para obtener la figura.

# Para construir un decágono

Conociendo cómo se traza un pentágono regular, se localiza el punto medio de cada uno de los lados.

Se determina el punto de intersección de la recta que pasa por el punto medio de cada lado y el centro de la circunferencia se prolonga, esta recta y las intersecciones de ellas en la curva se encuentran los otros vértices para formar un decágono.

Determinar la medida de cada ángulo interno.

$$\frac{180(n-2)}{n}=\frac{180°(10-2)}{10}=\frac{180(8)}{10}=144°$$

Y su mitad con 72°

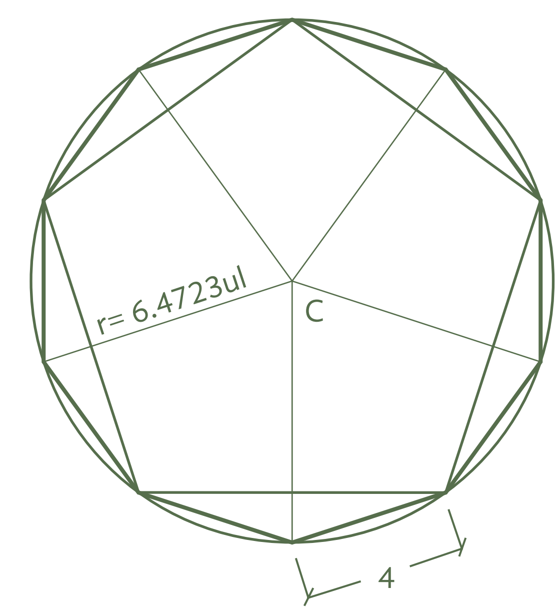
$$\tan \ de \ 72° \ =3.0776$$

$$\tan \ de \ 144°=0.7265$$

$$n=\frac{a(\tan\alpha)}{a}=\frac{4(3.0776)}{2}=6.1552$$

Entonces $sen72°=\dfrac{6.1552}{r}$

Por lo que $r=\dfrac{6.1552}{sen72°}=\dfrac{6.1552}{0.9510}=6.4723ul$



# Para construir un endecágono

Figuras con once lados iguales y once ángulos irregulares.

Suma de los ángulos= 11-2= 1620º

$$\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{180°(11-2)}{11}=\frac{180°(9)}{11}=147.27°$$

Es el valor de cada ángulo interior.

El ángulo central es de

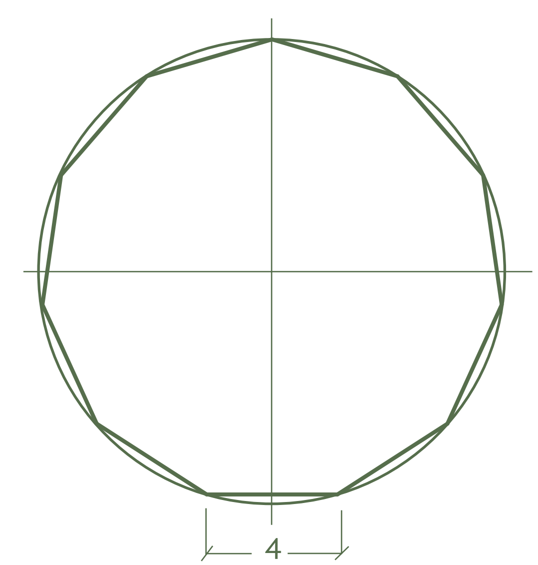
$$\frac{360°}{11}=32.73°$$

La mitad de 147.27º= 73.63º

Suponiendo la longitud de un lado de 4*ul*= *a*

$$h=\frac{a(\tan 73.63°)}{2}=\frac{4(3.405)}{2}=6.81ul$$

Determinamos el valor del radio de la circunferencia que inscribe al endecágono.



# Para construir un dodecágono

Suma de los ángulos internos 12-2 (180º)= 1800º

Ángulos internos

$\frac{180(n-2)}{n}=\frac{180(10)}{12}=150°$ Cada uno

La mitad de cada Angulo interno es: $\frac{150°}{2}=75°$

Suponiendo la longitud de cada lado de 4*ml*, se tiene:

$h=\frac{\tan 75°}{2}=\frac{4(3.7320)}{2}=7.464ml$

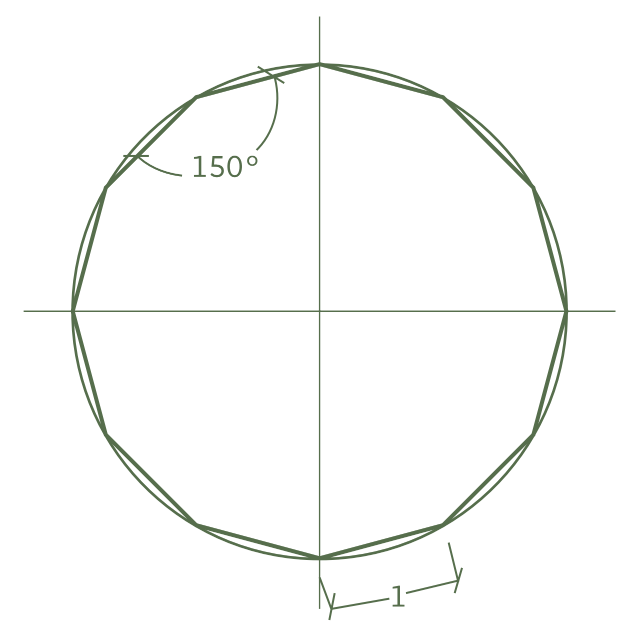
Recordar que *h=apotema*

Ahora determinar el radio del círculo que circunscribe a la figura.

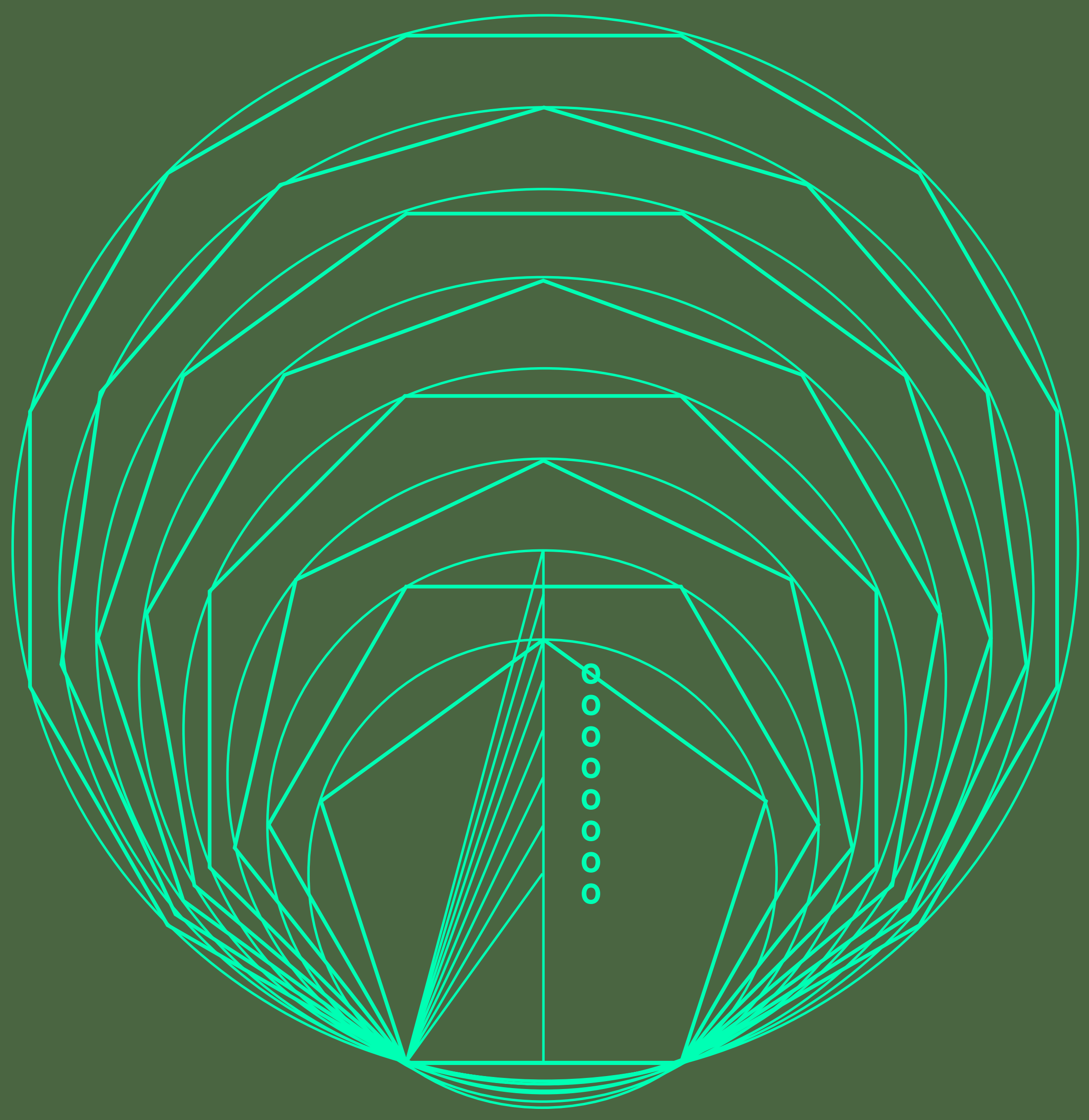
$sen\ \alpha=\frac{h}{r}$

$sen\ 75°=\frac{7.464}{r} \quad \therefore \quad r=\frac{7.464}{sen 75°}=\frac{7.464}{0.9659}$

*r=7.727 ml*

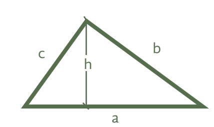
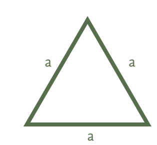
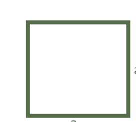
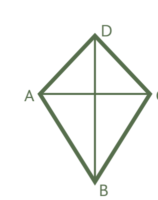


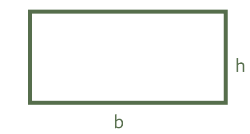
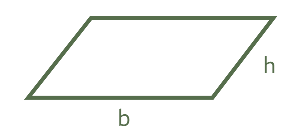
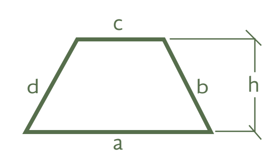
Como complemento de los problemas anteriores, se generó la siguiente figura en la cual están trazados los polígonos analizados, los cuales tienen en común la dimensión de un lado de *4ul*.

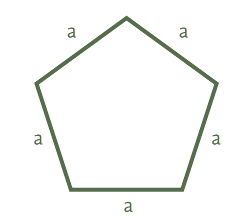
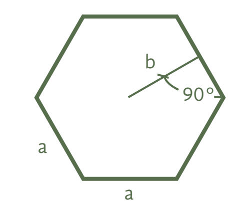
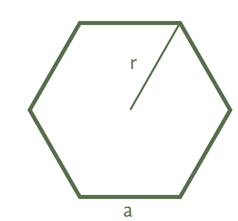


# Análisis de polígonos

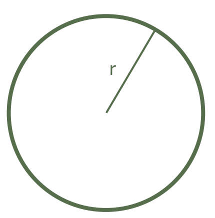
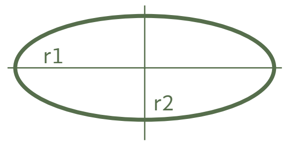
### Polígonos regulares

| Figura | Área interior | Perímetro | |
|---|---|---|---|
| Triángulo | $\frac{bh}{2}$ | a+b+c |  |
| Tríangulo equilátero | $\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\right)\left(a^2\right)$ | 3a |  |
| Cuadrado | $a^2$ | 4a |  |
| Rombo | $\frac{(AC)(BD)}{2}$ | 4a |  |

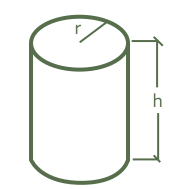
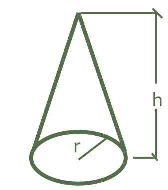
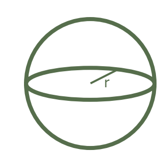
| | | | |
|---|---|---|---|
| Rectángulo | $bh$ | 2 (b+h) |   |
| Paralelogramo | $bh$ | 2 (a+b) |   |
| Trapecio | $\left(\frac{a+c}{2}\right)h$ | a+b+c+d |   |

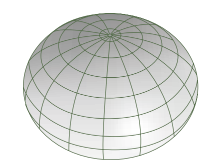
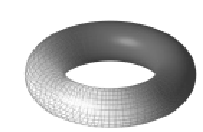
| | | | |
|---|---|---|---|
| Pentágono regular | $\frac{1}{4}\left(\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)a^2$ | 5a |   |
| Polígono regular | $\frac{n(a)(b)}{2}$ *b*= apotema del polígono | n (a) |   |
| Polígono regular | $\frac{1}{2}(n)sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)r^2$ | n (a) |   |

# Figuras curvas

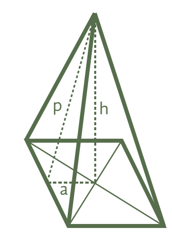
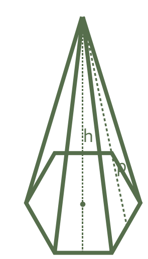
| Figura | Área interior | Perímetro | |
|---|---|---|---|
| Círculo | $\pi r^2$ | $2\pi r$ |  |
| Elipse | $\pi(r_1)(r_2)$ | $p \approx \left[3(r_1 + r_2) - \sqrt{(3r_1 + r_2)(r_1 + 3r_2)}\right]$ |  |

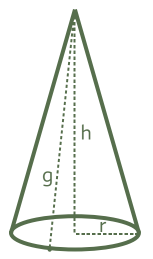
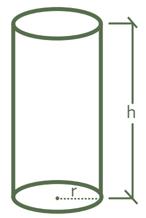
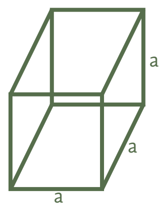
# Poliedro

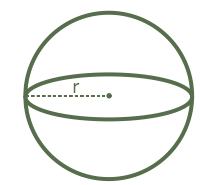
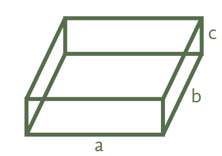
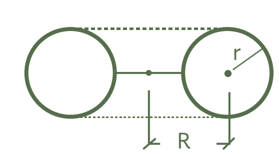
| Figura | Área interior | Perímetro | |
|---|---|---|---|
| Cilindro | $\pi(r^2)h$ | $2\pi rh + 2\pi r^2$ |  |
| Cono | $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ | $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ |  |
| Esfera | $\frac{4}{3}\pi r^3$ | $4\pi r^2$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Esferoide** | $\frac{4}{3}\pi a^2 c$ | $2\pi a\left(a+\frac{c}{e} ang\ sen\ e\right)$ |  |
| **Elipsoide** | $\frac{4}{3}\pi\ a\ b\ c$ | |  |
| **Toro** | $2\pi^2 r^2 R$ | $4\pi^2 rR$ |  |

# Áreas y volúmenes

| Figura | Área interior | Perímetro | |
|---|---|---|---|
| **Pirámide cuadrangular** | $A$= Área de la base + número de caras (área lateral) | |  |
| **Pirámide hexagonal** | $A = Ab + n\left(\frac{ap}{2}\right)$ | |  |
| **Semiesfera** | | $V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Cono** | $AL = \pi rg$<br>$A\,total = \pi rg + \pi r^2$ | $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ |  |
| **Cilindro** | $A = \pi\ rh$<br>$A\ total = 2\pi\ rh * 2\ \pi r^2$ | $V = \ ^2rh$ |  |
| **Cubo** | $A = 6\left(a^2\right)$ | $V = a^3$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Esfera** | $A = 4\pi r^2$ | $V = \frac{3}{4}\pi r^3$ |   |
| **Paralelepípedo** | $A = 2ab + 2ac + 2bc$ | $V = abc$ |   |
| **Toro circular** | $A = 4\pi^2 Rr$ | $V = 2\pi r^2 R$ |   |

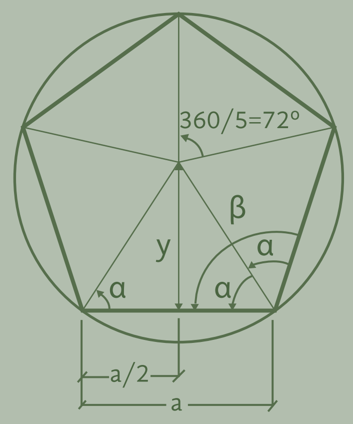
# Problemas

**Con frecuencia se requiere realizar el trazo de una figura geométrica regular, como es el caso de un pentágono, de un hexágono, entre otros, ya sea para tenerlo en planta, o para hacer el diseño de una cubierta. El caso es resolver, apoyados en nuestros conocimientos de trigonometría el trazo preciso de estas figuras planas.**

Sea resolver el trazo de un pentágono.

Se desea tener un lado $a = 4ul$. Y el número de caras n = 5, definiremos una base y una altura que va desde la base hasta el centro ***y*** de la circunferencia que inscribirá a la figura, a esa altura la llamaremos ***y***; misma que se conoce como apotema.

Observemos la figura:




$$y = \frac{a}{2}\tan\alpha = apotema$$

De donde:

$$\tan\alpha = \frac{y}{\frac{a}{2}} = \frac{2y}{a}$$

$$a\tan\alpha = 2y$$

$$y = \frac{a\tan\alpha}{2}$$

Ahora, definamos el ángulo interno $\beta$, que queda entre dos de los lados de la figura.

$$\beta = \frac{n-2}{n}\left(180^\circ\right)$$

$$\beta = \frac{5-2}{5}\left(180\ \right) = 0.6\left(180^\circ\right) = 108^\circ$$

Pero ocurre que $\beta = 2\alpha$ , entonces:

$$108^\circ = 2\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 54^\circ}$$

Con este dato, sustituimos

$$y = \frac{4\left(\tan 54^\circ\right)}{2} = 2\left(1.3763\right) = \boxed{2.7527}$$

Recordemos que $r = \dfrac{y}{sen\alpha}$, entonces:

$$r = \frac{2.7527}{sen54^\circ} = \frac{2.7527}{0,8090} = \boxed{3.4ul}$$

Resumamos las expresiones fundamentales para estos casos:

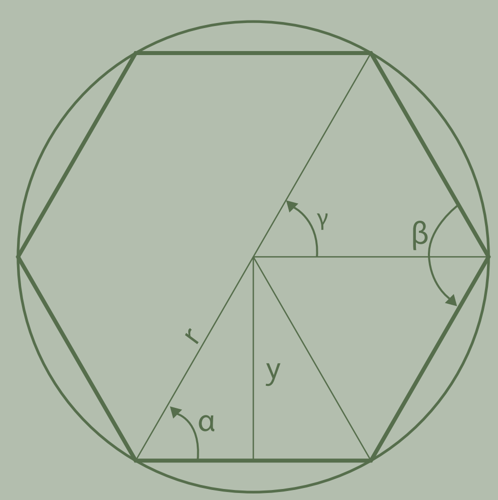
$$y = \frac{a}{2}\tan\alpha = apotema$$

$$r = \frac{y}{sen\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

$\beta = \dfrac{n-2}{n}\left(180^\circ\right)$ y, $\gamma = \dfrac{360^\circ}{n}$

**Hagamos ahora el trazo de un hexágono con lado igual a 4 unidades lineales.**




$$y = \frac{a \tan\alpha}{2} = \frac{4\left(\tan 60^\circ\right)}{2} = 3.464ul$$

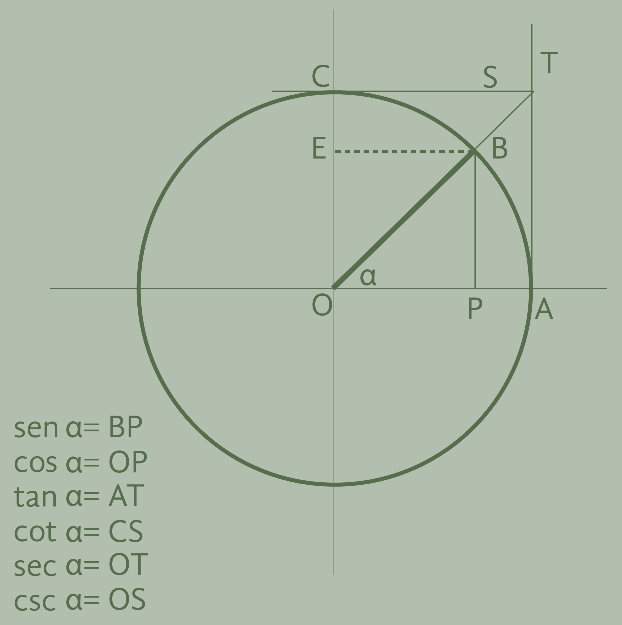
$$r = \frac{y}{sen\alpha} = \frac{3.464}{sen60^\circ} = 3.999 \approx 4.0ul$$

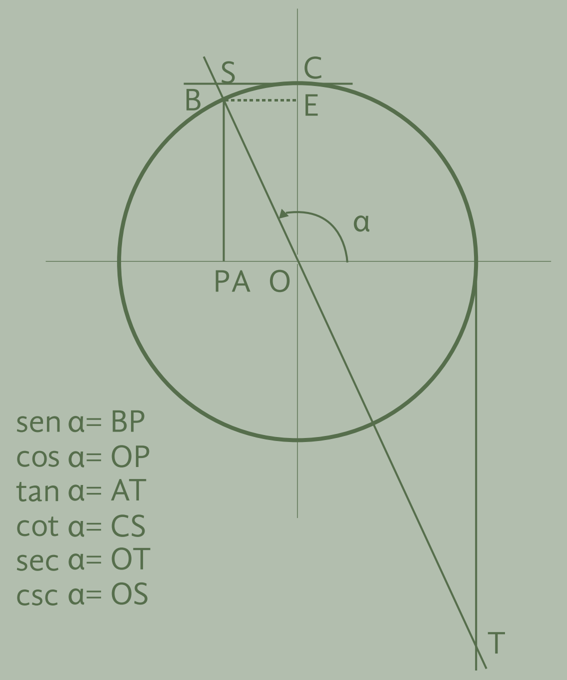
$$\beta = \frac{n-2}{n}\left(180^\circ\right) = \frac{6-2}{6}\left(180^\circ\right) = 120^\circ$$

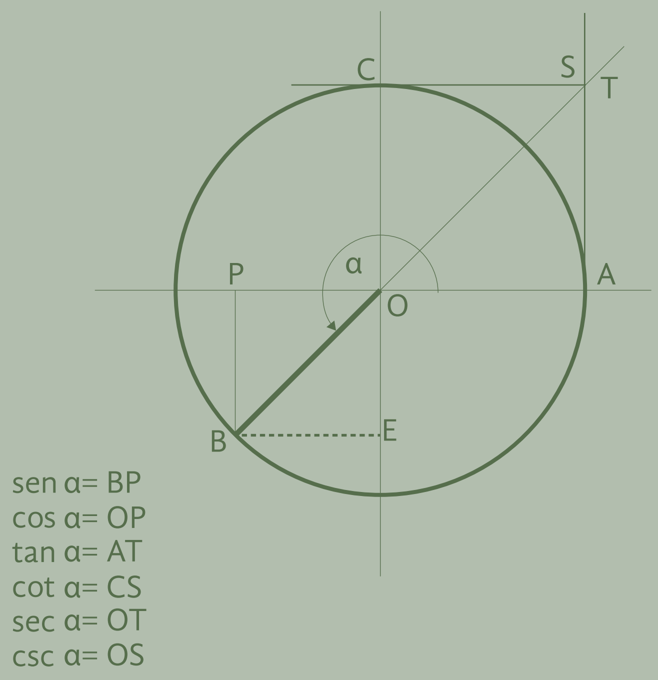
$$\gamma = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60$$

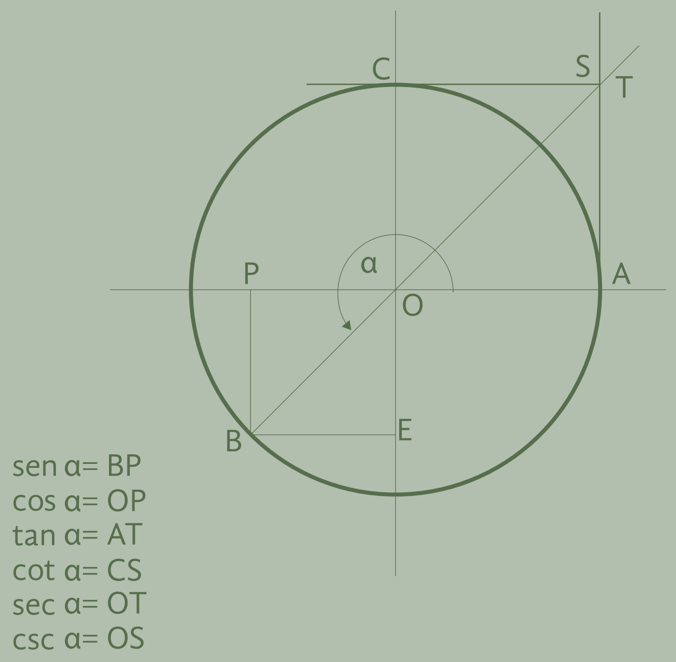
Trazar las seis funciones trigonométricas con sus valores reales para ángulos que se ubiquen en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Es conveniente recordar los signos de las funciones trigonométricas directas en los cuadrantes, a continuación se presenta una tabla con estas consideraciones.



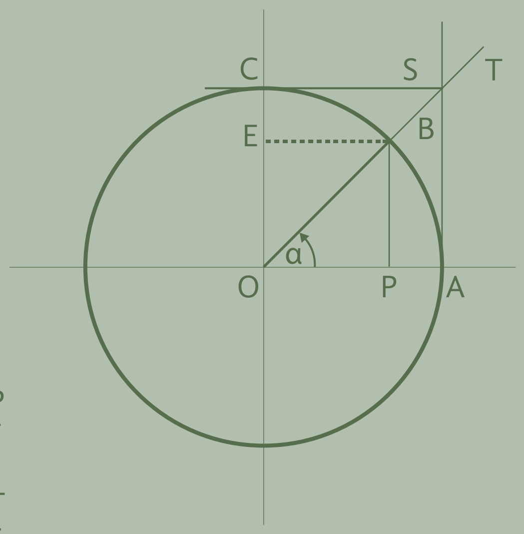



### SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

| **Función** | **I** | **II** | **III** | **IV** |
|---|---|---|---|---|
| sen | + | + | – | – |
| cos | + | – | + | – |
| tan | + | – | – | + |
| cot | + | – | – | + |
| sec | + | – | + | – |
| csc | + | + | – | – |

**Construir una figura que represente a las seis funciones trigonométricas directas para un radio = 6ul en el primer cuadrante. Supongamos un ángulo de 45°.**




sen α= BP
cos α= OP
tan α= AT
cot α= CS
sec α= OT
csc α= OS

$$sen45° = 0.7071(6) = 4.2426 = BC$$

$$\cos 45° = 0.7071(6) = 4.2426 = OC$$

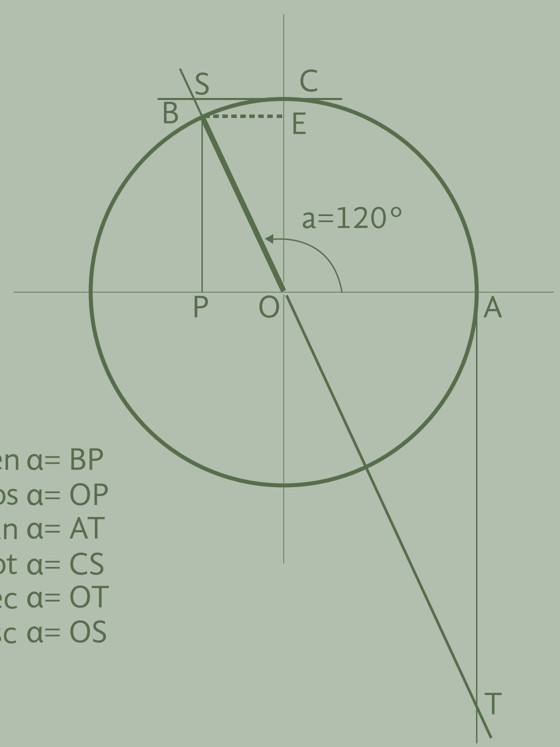
$$\tan 45° = 1.0(6) = 6.0 = AE$$

$$\cot 45° = 0.1667(6) = 1.0 = PF$$

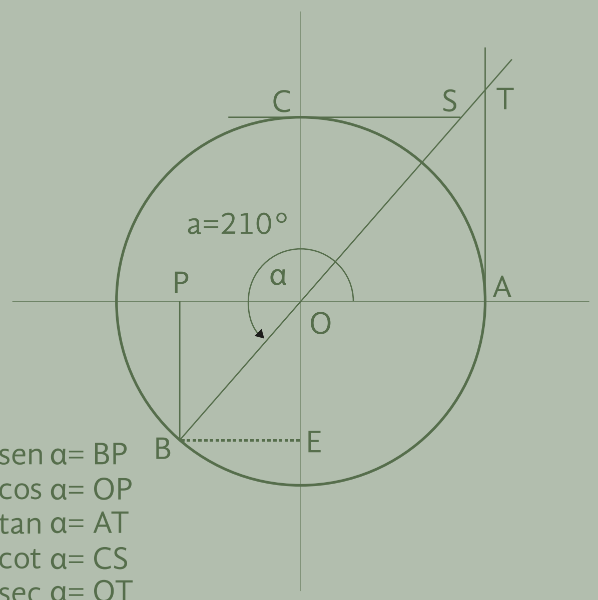
$$\sec 45° = 1.4142(6) = 8.4854 = OB$$

$$\csc 45° = 1.4142(6) = 8.4854 = OF$$

Ahora, hagamos el trazo de las mismas funciones para un ángulo que esté en el segundo cuadrante, por ejemplo 120°, con radio también de 6ul.




sen α= BP
cos α= OP
tan α= AT
cot α= CS
sec α= OT
csc α= OS




sen α= BP
cos α= OP
tan α= AT
cot α= CS
sec α= OT
csc α= OS

Sea el trazo de las funciones para un ángulo en el tercer cuadrante, para un ángulo de 210° y un radio de 6ul.

$sen120^{o} = 0.8660(6) = 5.1962 = BC$

$\cos 120^{o} = -0.50(6) = -3.0 = OC$

$\tan 120^{o} = -1.7321(6) = -10.3923 = AE$

$\cot 120^{o} = -0.5773(6) = -3.4640 = DF$

$\sec 120^{o} = -2.0(6) = -12.0 = EO$

$\mathrm{esc}120^{o} = 1.1547(6) = 6.9284 = FO$

$sen210^{o} = 0.5(6) = -3\text{-}0 = BF$

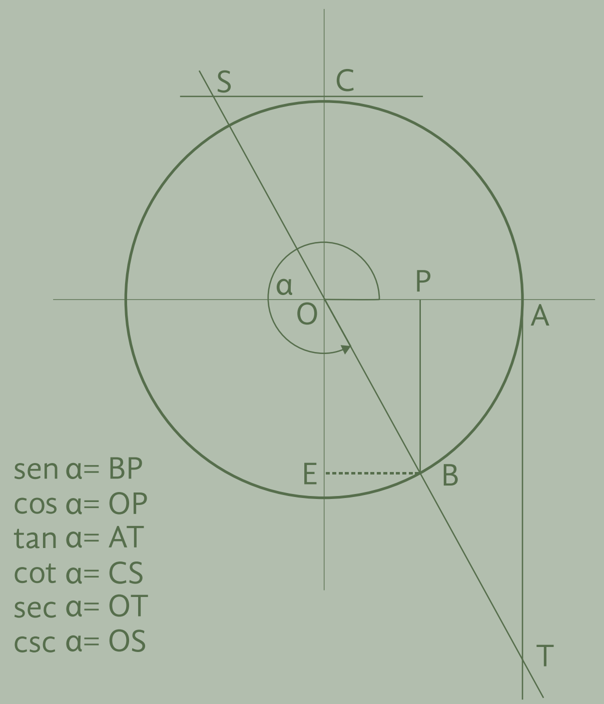
$\cos 210^{o} = -0.866(6) = -5.1962 = OB$

$\tan 210^{o} = 0.5774(6) = 3.4641 = AE$

$\cot 210^{o} = 1.7319(6) = 10.3914 = DF$

$\sec 210^{o} = -1.1547(6) = -6.9284 = EO$

$\mathrm{esc}210^{o} = -2.0(6) = -12.0 = FO$




Por último, un ángulo en el cuarto cuadrante, por ejemplo 300° y radio r = 6ul.

$$sen 300° = -0.866(6) = -5.1962 = AB$$

$$\cos 300° = 0.50(6) = 3.0 = AO$$

$$\tan 300° = -1.7321(6) = -10.3923 = CD$$

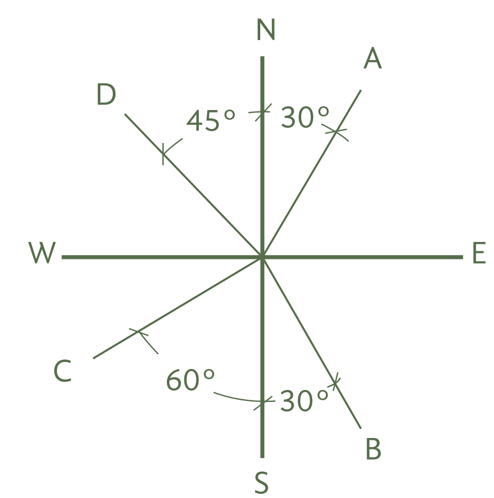
$$\cot 300° = -0.5773(6) = -3.4640 = EF$$

$$\sec 300° = -2.0(6) = -12.0 = DO$$

$$\csc 300° = -1.1547(6) = -6.9284 = BD$$

# Rumbo y Azimut

La trigonometría también se utiliza en topografía, como el manejo de ángulos, de sus funciones y para entender la notación de los rumbos y los azimuts.



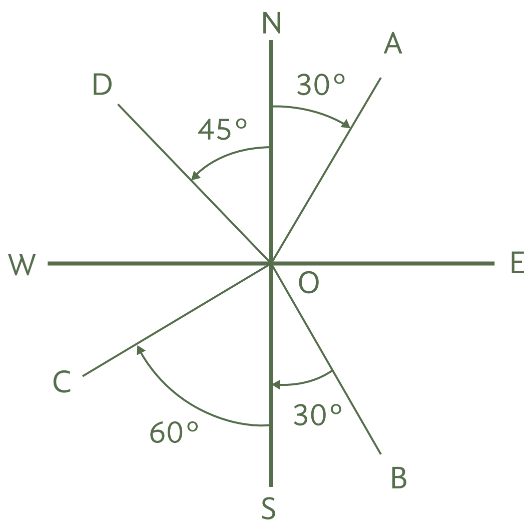

### Cómo leer e interpretar los rumbos

Rumbo es una dirección que tiene como origen la línea norte sur y tiene un valor de 0° a 90° y se identifica con las literales de acuerdo al cuadrante en que se encuentre.

| **Línea** | **Rumbo** |
|---|---|
| 0A | N30° E |
| 0B | S30° E |
| 0C | S60° W |
| 0D | N45° W |

### Cómo leer e interpretar los Azimuts

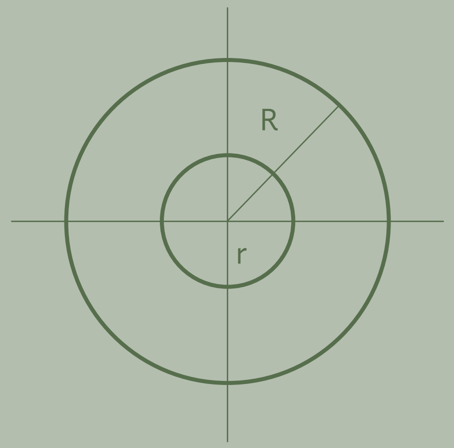
Azimut en una dirección que tiene como origen la línea norte sur y tiene un valor de 0° a 360° el giro del ángulo es igual al de las manecillas de un reloj.




| Línea | Rumbo |
|---|---|
| 0A | 30° |
| 0B | 150° |
| 0C | 240° |
| 0D | 315° |

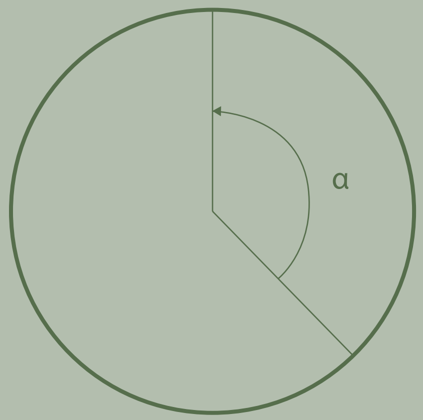
# Problemas

Área de una corona circular



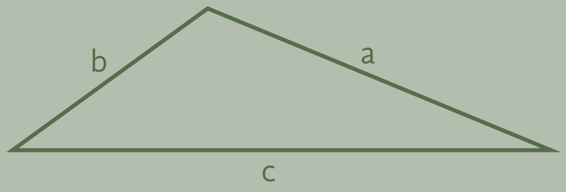

$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

**Determinar el área de un sector circular**




$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

Área de un triángulo conocidos sus teres lados (formula de Herón)

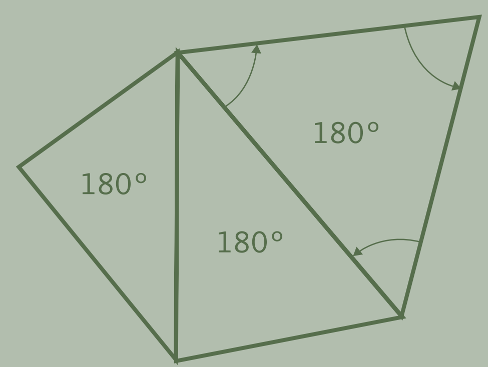



**Semiperímetro**

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

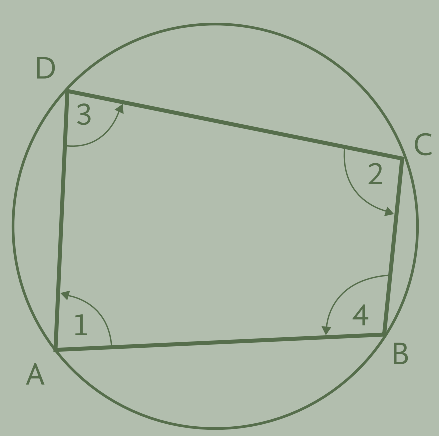
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.




$$180°(n-2)$$

Cuadrilátero inscrito en una circunferencia ángulos o puntos. En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia la suma de los ángulos opuestos es 180°



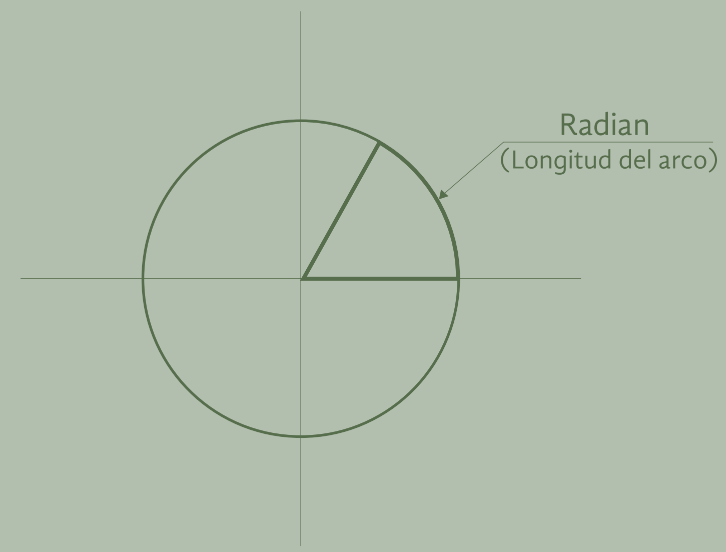

$$ang1 + ang2 = 180^{\circ}$$

$$ang3 + ang4 = 180^{\circ}$$

En todo el cuadrilátero inscrito en una circunferencia le suma de los ángulos opuestos es 180°

**Radian**

El ángulo formado por dos radios en una circunferencia medido en radian es igual a la longitud del arco que delimitan los dos radios.



# Problemas

**Convertir grados sexagesimales a radianes.**

| Grados | Radianes |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 30 | π / 6 |
| 45 | π / 4 |
| 60 | π / 3 |
| 90 | π / 2 |
| 120 | 2π / 3 |
| 135 | 3π / 4 |
| 150 | 5π / 6 |
| 180 | π |
| 210 | 7π / 6 |
| 225 | 5π / 9 |
| 240 | 4π / 3 |
| 270 | 3π / 2 |
| 300 | 5π / 3 |
| 315 | 7π / 4 |
| 330 | 11π / 6 |
| 360 | 2π |

**Ejemplo**

Si queremos saber a cuantos radianes equivale , se tiene.

$$360 = 2\pi$$

$$90 = x$$

$$\frac{360}{90} = \frac{2\pi}{x}$$

$$x = \frac{90(2\pi)}{360} = \frac{\pi}{2}$$

Para convertir grados a radianes o radianes a grados

$$\frac{Angulo\ en\ grados}{360} = \frac{Angulo\ en\ radianes}{2\pi}$$

Ejemplo 23° a radianes: $\frac{23}{360} = \frac{x}{2\pi} = 0.401\ rad$

ó $\frac{\pi}{6}$ radianes a grados: $\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{\pi}{12\pi} = 30°$

# Capítulo 3

## DETERMINANTES Y MATRICES

La utilización de matrices y determinantes ayuda a plantear y a resolver problemas de diversa índole, a continuación resolveremos algunos problemas que nos permiten identificar sus posibles aplicaciones.

## Ejemplo de obtención de mayor ganancia

# Problema

**Un exportador de fruta tiene 900 cajas de naranja, 700 de toronja y 400 de mandarina, el precio en el mercado puesto en plaza por caja es de:**

| Ciudad | mandarina | naranja | toronja |
|---|---|---|---|
| Guadalajara | 4 | 2 | 3 |
| Cd. Juárez | 5 | 1 | 2 |
| Cd. de México | 4 | 3 | 2 |
| Monterrey | 3 | 2 | 5 |

¿A qué ciudad convendrá mandar la mercancía para obtener la mayor ganancia?

Elaborando la matriz de venta por caja, queda:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 900 \\ 700 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,200 \\ 6,000 \\ 6,500 \\ 6,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

Por lo que, lo más conveniente es enviar a la Ciudad de México, donde se obtendrá una mejor ganancia.

# Problema

**Con cierta frecuencia nos enfrentamos al problema de resolver ecuaciones lineales simultáneas y debemos recordar entonces los procedimientos tradicionales, tales como eliminación por suma y resta, por igualación o por sustitución. Cuando el sistema por resolver tiene tres incógnitas y tres ecuaciones o más, conviene recordar los procedimientos de determinantes y de matrices.**

Apliquemos estos conocimientos resolviendo unos problemas.

Sea el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x - y + 2z = 3$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

Ordenemos los coeficientes y los términos independientes

$$2 + 3 - 1 = 1$$

$$1 - 1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

Resolvamos el determinante del sistema

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(20) = 10$$

Ahora los determinantes de cada una de las incógnitas, utilizando el método de Chio:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(60) = 20$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-20) = -10$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

A continuación encontremos los valores de las incógnitas.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{20}{10} = \boxed{2}\ ,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{-10}{10} = \boxed{-1}\ ,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta_x} = \frac{0}{10} = \boxed{0}$$

x = 2, y = -1, z = 0

# Problema

**Resolvamos el caso anterior pero ahora por matrices.**

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x - y + 2z = 3$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

Recordemos la expresión algebraica para la solución:

$\left[x\right] = \frac{1}{\Delta_s}\left[A^r\right]\left[k\right]$ , en la que *x* significa las incógnitas, *A′* es la matriz adjunta y *K* los términos independientes.

Calculemos la matriz adjunta o comatríz, tomando en cuenta que primero se traspone la matriz de coeficientes.

$\left[A\right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, ahora la transpuesta: $\left[A'\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

A partir de la matriz transpuesta calculemos la matriz de cofactores:

$$\left[A^r\right] = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

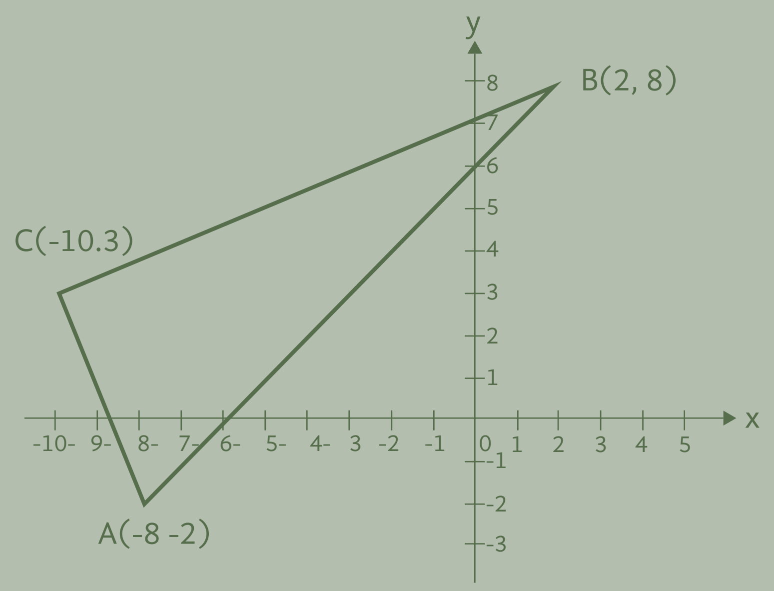
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$ por lo que: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{10} \\ \frac{-10}{10} \\ \frac{0}{10} \end{bmatrix}$

x = 2,   y = -1   z = 0

# Problema

**Calcular el área de un polígono por determinantes.**

**Sea un terreno de forma triangular, de vértices A (-8, -2), B (2 , 8) y C (-10, 3)**




$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-8 & -2 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ -10 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[(-8)(8)(1)+(2)(3)(1)+(-10)(-2)(1)-(-10)(8)(1)-(-8)(3)(1)-(2)(-2)(1)\right]=$$

$$A=\frac{1}{2}(-64+6+20+80+24+4)=\frac{1}{2}(70)=\boxed{35u^2}$$

Para aclarar el procedimiento aplicado anteriormente, conviene recordar que el determinante se forma con las coordenadas de los vértices y como se requiere que sea de igual número de filas que columnas se les agrega un 1 después de cada par de coordenadas. También conviene recordar que el valor del área es la mitad del valor del determinante.

# Problema

**Calcular la misma superficie por el método abreviado:**

La ecuación por utilizar se construye de la siguiente manera:

$$2A=(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_1)(x_3-x_1)$$

El número de sumandos es igual al número de vértices que tenga la figura.

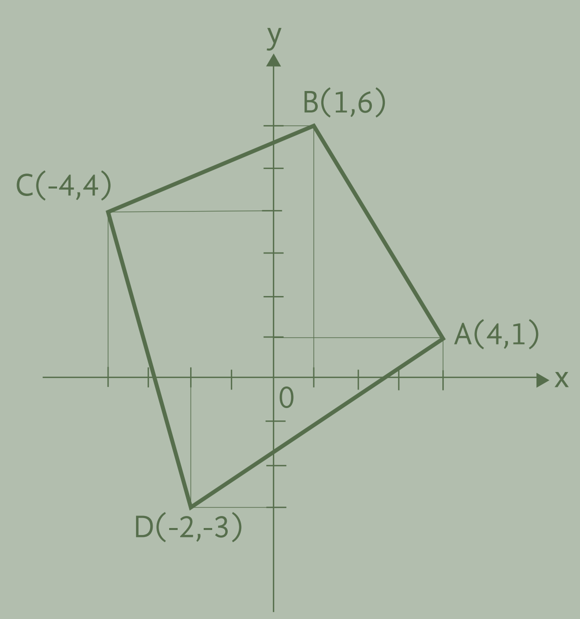
$$2A=(8+3)(2+10)+(3-2)(-10+8)+(-2+8)(-8-2)=132-2-60=70$$

$$A=\frac{70}{2}=\boxed{35u^2}$$

# Problema

**Sea calcular el área de un polígono de 4 lados, que bien pudiera ser un terreno.**

**Dando los vértices siguientes: A (4, 1), B (1, 6), C (-4, 4) y D (-2,-3)**




Recordemos que es necesario recorrer la figura en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, pues de lo contrario resultará el área negativa, cosa que no puede ser pues se trata de unidades cuadradas o de superficie.

$$2A=(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_4)(x_3-x_4)+(y_4+y_1)(x_4-x_1)$$

$$2A=(1+6)(4-1)+(6+4)(1-(-4))+(4+(-3))(-4-(-2))+(-3+1)(-2-4)=$$

$$2A=(7)(3)+(10)(5)+(1)(-2)+(-2)(-6)=21+50-2+12=81$$

$$\boxed{A=\frac{81}{2}=40.5u^2}$$

# Problema

**Una unidad habitacional se puede hacer con 30 casas unifamiliares y 10 casas de tipo dúplex, o bien 10 casas unifamiliares y 20 dúplex.**

**30 casas unifamiliares**
**10 dúplex**
**ó**
**10 casas unifamiliares**
**20 dúplex**

**Cada opción por el mismo costo de $10´000,000.00**

**¿Cuál será el costo de la unifamiliar y cual el de la dúplex?**

1ª. Opción: 30x + 10y
2ª. Opción: 10x + 20y

En ambos casos, el costo es de $10´000,000.00
Hagamos los cálculos quitando ceros.

$$30x + 10y = 10$$

$$10x + 20y = 10$$

Si resolvemos el problema por determinantes quedará:

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = 30(20) - 10(10) = 600 - 100 = 500$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = 10(20) - 10(10) = 200 - 100 = 100$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = 30(10) - 10(10) = 300 - 100 = 200$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{100}{500} = 0.20$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{200}{500} = 0.40$$

Como se redujeron seis ceros, ahora regresamos a la forma original.

$$x = 0.20(1'000,000) = 200,000.00$$

$$y = 0.40(1'000,000) = 400,000.00$$

Primera opción: $30(200,000) + 10(400,000) = 10'000,000$

Segunda opción: $10(200,000) + 20(400,000) = 10'000,000$

# Problema

**Una compañía constructora edifica 2 tipos de casas, casa tipo *A* y casa tipo *B* y les da 3 tipos de acabados diferentes: acabado *J*, acabado *K* y acabado *L*.**

Del modelo *A* construye 400 casas, con acabado *J*, 200 casas, con acabado *K* y 50 casas con acabado *L*.

Del modelo *B*, construye 300 casas con acabado *J*, 100 casas con acabado *K* y 30 casas con acabado *L*.

La construcción con acabado *J* lleva 25 semanas de desarrollo y 1 semana en gabinete para el control de la obra. Las terminadas con tipo *K*, llevan 30 semanas de desarrollo y 1.2 semanas de gabinete y las de terminación *L*, llevan 33 semanas de desarrollo y 1.3 semanas de trabajo en gabinete.

Representar en forma matricial la expresión que muestre la producción de las casas así como la que represente los tiempos de sus desarrollos.

$$P = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Matriz que expresa los tiempos de desarrollo y de gabinete:

$$P = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ & & \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,650 & 705 \\ & \\ 11,490 & 459 \end{pmatrix}$$

# Capítulo 4

## GEOMETRÍA ANALÍTICA



Índice

# Geometría analítica

El conocimiento de la geometría analítica por parte de un arquitecto es fundamental para comprender, plantear y resolver varios tipos de problemas que se pueden presentar en el ejercicio profesional. A continuación me permito exponer algunos casos que ejemplifican varias aplicaciones de esta rama de las matemáticas, problemas de línea recta, de parábola y de elipse.

# Problema

**El perímetro de un terreno rectangular es de 300.00 m, la base tiene 30.00 m más que la altura, hállense las dimensiones del terreno.**

$$2x + 2y = 300$$

$$x = y + 30$$

Esta es una aplicación de la ecuación de la recta.

En este caso la resolveremos por el método de sustitución, ya que se trata de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

Sustituyendo el valor de *x* de la segunda ecuación en la primera, se tendrá:

$$2x + 2y = 300$$

$$x = y + 30$$

$$2(y + 30) + 2y = 300$$

$$2y + 60 + 2y = 300$$

$$4y = 240$$

$$y = \frac{240}{4} = \boxed{60.00m}$$

Ahora, sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación tendremos:

$$x = 60.00 + 30.00 = \boxed{90.00m}$$

# Problema

**Hallar las dimensiones de un terreno rectangular cuyo perímetro sea de 50.00 m y su área de 150.00m² .**

Datos: la suma de los 4 lados = 50.00 m, la suma de lados adyacentes = 25.00 m.

Sean $x$ y $25-x$ las longitudes de los lados adyacentes.

El área es

$$x(25-x)=150$$

$$x^2-25x+150=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, nos queda:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{25\pm\sqrt{625-600}}{2}=\frac{25\pm 5}{2}=$$

Por lo que:

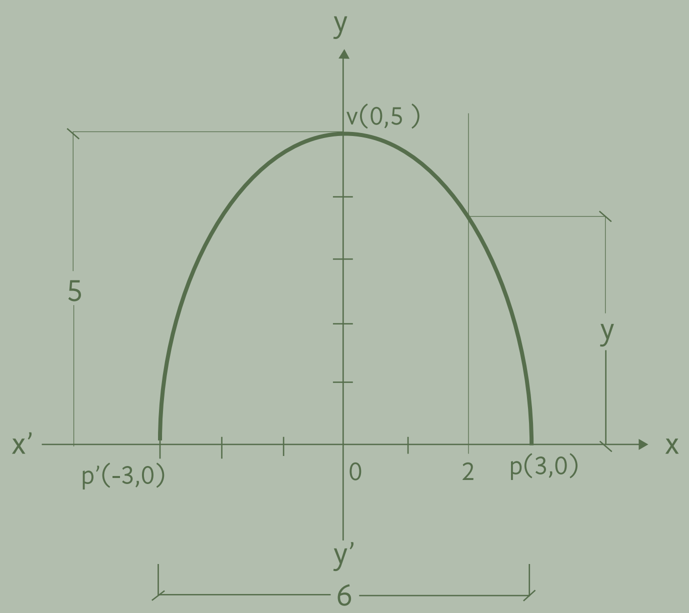
$$x_1=\frac{25+5}{2}=\frac{30}{2}=\boxed{15}$$

$$x_2=\frac{25-5}{2}=\frac{20}{2}=\boxed{10}$$

# Problema

Como arquitecto he diseñado cierto edificio en el cual existe un patio rodeado por un pórtico con arcos hacia él. Estos arcos son de forma parabólica: de 5.00 m de altura en el vértice y de base 6.00m.

Se requiere calcular la longitud de un manguete de aluminio que se tiene que ubicar en ambos lados, a 2.00 m del eje central o de simetría del arco.
Como el arco parabólico es simétrico con respecto a un eje, hagamos coincidir ese eje con el eje *Y´Y* y al eje *X´X* como base del arco.



Dando los valores que se plantean, el vértice será V(0,5) y, por lo tanto, la ecuación de ese arco será:

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

$$(x-0)^2 = -4a(y-5)$$

Por los datos del problema, sabemos que la curva en su base pasa por el punto P(3,0), y por lo tanto si estas coordenadas se sustituyen en la ecuación, esta debe satisfacerse.

$$(3-0)^2 = -4a(0-5)$$

$$9 = 20a$$

$$a = \frac{9}{20}$$

Por consiguiente,

$$(x-0)^2 = -4\left(\frac{9}{20}\right)(y-5)$$

$$(x-0)^2 = -1.8(y-5)$$

Ahora, tomando la medida de 2.00m a partir del eje de simetría, pues estamos buscando la altura del manguete vertical que se encuentra a esa distancia.

$$(2-0)^2 = -1.8(y-5)$$

$$4 = -1.8y + 9$$

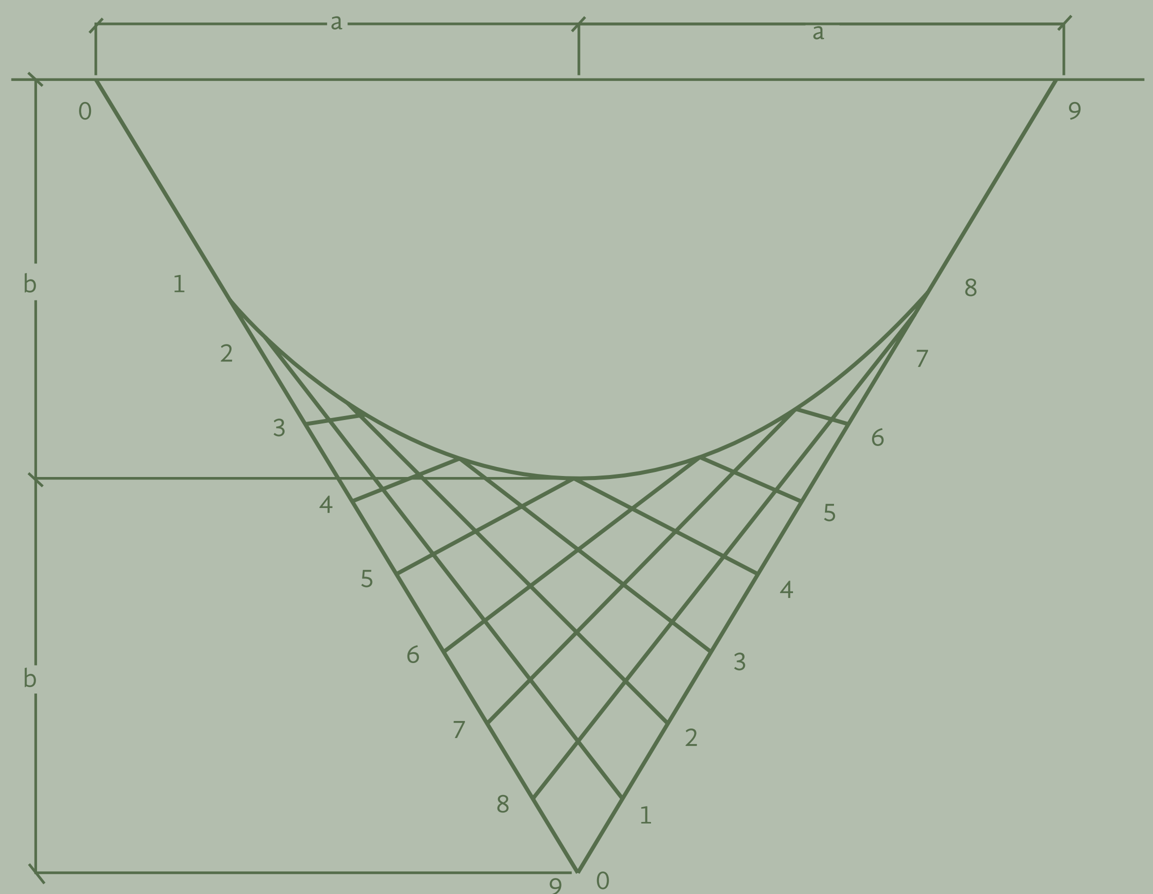
$$y = \frac{-5}{-1.8} = \boxed{2.77m}$$

Que es la dimensión buscada.

# Problema

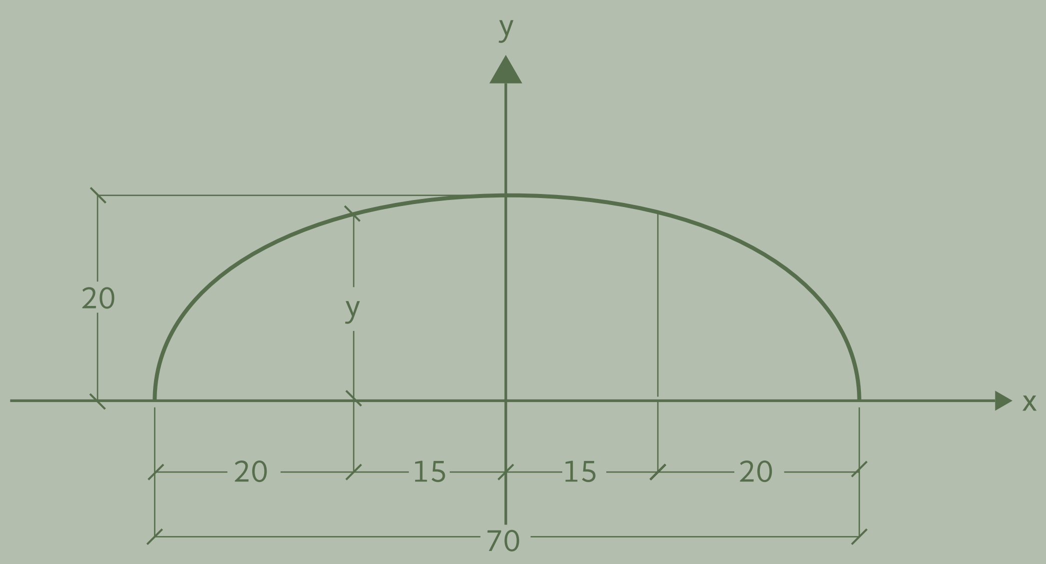
**Cómo trazar una parábola.**

**Con una longitud igual a *2a* y una altura igual a *b*.**



# Problema

**Un arco tiene forma de elipse, salva un claro de 70.00 m y su altura máxima es de 20.00 m; se necesita conocer la altura de unas columnas de acero que se colocarán a 20.00 m de los extremos de la curva para poder fijar de ellas la cancelería de aluminio.**




Suponiendo que la base de la elipse coincide con el eje *X´X* y que el centro de la figura tiene al eje *Y´Y* como eje de simetría, la ecuación del lugar geométrico para este caso será del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Siendo en este caso, el semieje mayor: $a=35$

y el semieje menor: $b=20$

Con los datos anteriores podemos entonces construir la ecuación correspondiente.

$$\frac{x^2}{1225}+\frac{y^2}{400}=1$$

# Problema

**Cómo trazar una elipse.**

Si nos fijamos, la altura o longitud de la columna que buscamos es igual a la ordenada que tiene como abscisa 15, sustituyendo este valor en la ecuación, obtendremos el valor correspondiente a la ordenada.

$$\frac{225}{1225}+\frac{y^2}{400}=1$$

$$0.1837+\frac{y^2}{400}=1$$

$$\frac{400(0.1837)+y^2}{400}=1$$

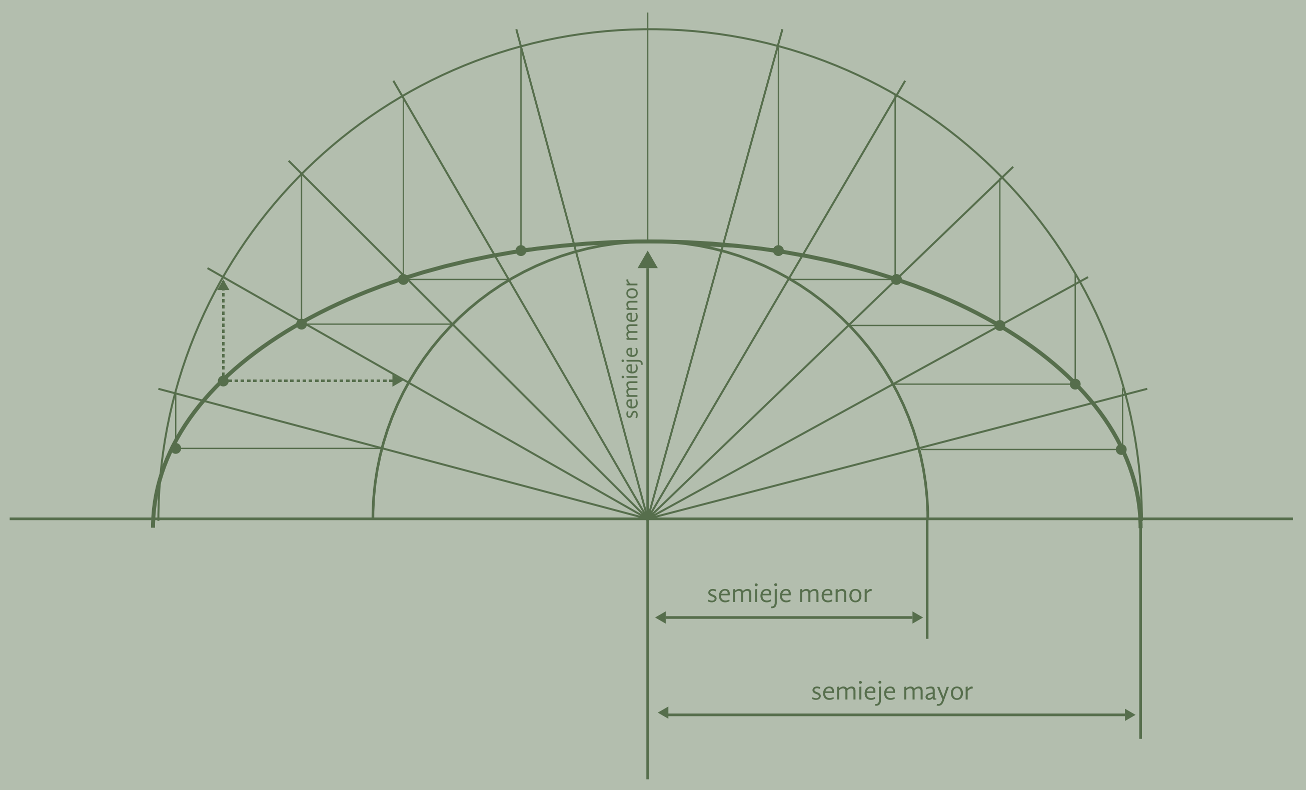
$$73.48+y^2=400$$

$$y^2=400-73.48$$

$$y^2=326.52$$

$$y=\boxed{18.07m}$$

Que es la altura buscada para hacer la columna de acero.



# Capítulo 5

## CÁLCULO DIFERENCIAL



Índice

# Cálculo diferencial

Otra herramienta que nos brinda la aplicación de las matemáticas la constituye el cálculo infinitesimal, tanto en el aspecto del cálculo diferencial como del cálculo integral.

# Problema

**Se necesita encontrar una superficie regular que con un perímetro establecido tenga el área máxima posible. Para ejemplificar este caso, se requiere que las figuras que compararemos tengan el mismo perímetro, que en este caso será de 72.00 m, pero que tengan la superficie máxima posible.**

Se pueden presentar una infinidad de casos, a continuación se ilustran algunas de las posibilidades:

| Largo (m) | Ancho (m) | Perímetro (m) | Superficie ($m^2$) |
|---|---|---|---|
| 20.00 | 16.00 | 72.00 | 320.00 |
| 26.00 | 10.00 | 72.00 | 260.00 |
| 30.00 | 6.00 | 72.00 | 180.00 |

Como se puede apreciar, las superficies de las figuras son diferentes y, sin embargo, el perímetro es el mismo en todos los casos.

¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo de perímetro de 72.00 m que permitan tener el área máxima?

Si llamamos *x e* y a las dimensiones del rectángulo y *A* a la superficie del mismo, la expresión matemática que define la condición será: **A = xy**

Como disponemos de una sola ecuación con dos incógnitas buscaremos una relación que permita tener una de ellas en función de la otra. Si observamos la condición que plantea todo perímetro de un rectángulo, tendremos:

$$Perimetro = 2x + 2y = 72$$

$$Simplificando: x + y = 36$$

Por lo que: $y = 36 - x$

Ahora sustituyendo este valor de *y* en la función del área se tiene:

$$A = x(36 - x) = 36x - x^2$$

Como lo que se busca obtener es el área máxima, procederemos a emplear el criterio de la primera derivada:

$$A = 36x - x^2$$

$$A' = 36 - 2x$$

Igualando esta derivada con cero, se tiene:

$$36 - 2x = 0$$

$$Luego 36 = 2x$$

Por lo que: $x = 18$

Y ahora, sustituyendo en la ecuación que tiene *A* la y despejada se tendrá que:

$$y = 36 - x$$

Por lo que: $y = 36 - 18$

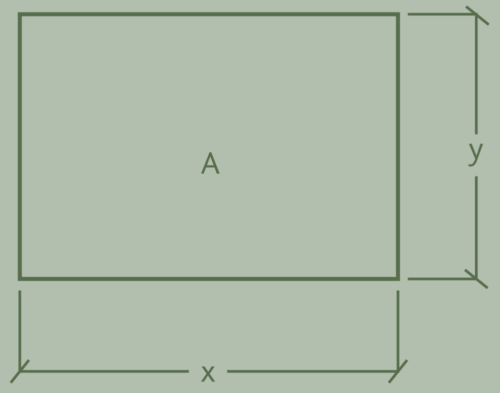
$$y = 18$$

Lo que permite concluir que la figura rectangular de un perímetro constante que más superficie tiene es el cuadrado y en este caso, el rectángulo de perímetro = 72.00 m, es un cuadrado de 18.00 m x 18.00 m, que tiene un área de 324.00 m².

Como conclusión general debemos considerar que el cuadrado es un caso particular del rectángulo y que es además la figura que teniendo un perímetro determinado tendrá el área máxima posible.

# Problema

**De todos los rectángulos de perímetro constante, ¿cuál es el de área máxima?**




$$A = xy \quad \rightarrow \quad 1$$

$$P = 2x + 2y \quad \rightarrow \quad 2$$

De la ecuación 2 despejar y:

$$p - 2x = 2y$$

$$\frac{p-2x}{2} = y$$

Sustituyendo en 1

$$A = x\left(\frac{p-2x}{2}\right) = \frac{px-2x^2}{2} = \frac{1}{2}\left(px-2x^2\right)$$

Derivando

$$A' = \frac{1}{2}\left(P-4x\right) = \frac{P}{2} - 2x$$

Ahora igualando la primera derivada en 0 queda:

$$\frac{p}{2} - 2x = 0$$

$$\frac{p}{2} = 2x$$

Por lo tanto

$$x = \frac{p}{4}$$

Segunda derivada $A'' = -2 \langle 0$ por lo tanto hay máximo

$$A = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

Por lo tanto las dimensiones del rectángulo con perímetro constante y área máxima serán $L\arg o = \frac{p}{4}$ y $Ancho = \frac{p}{4}$, luego se determinará que es un cuadrado.

# Problema

**Determinación del número de pisos de un edificio para oficinas.**

**El costo de construcción de un edificio de oficinas es de $500 000.00 para el primer nivel, de $525,000.00 para el segundo, de $550,000.00 para el tercero y así, con un aumento de $25,000.00 por cada nivel que vaya aumentándose en altura.**

**El costo del terreno, del proyecto ejecutivo y de los peritajes, las licencias y permisos ascienden a $3'500,000.00.**

**Si para este caso la renta anual neta para cada piso es de $50,000.00, ¿cuántos pisos convendrá diseñar para obtener el tipo más alto de interés de la inversión?**

Para ayudarnos a comprender el problema, requerimos del apoyo científico para determinar por inducción matemática la ley que describe el aumento de costo a medida que se aumenta los niveles del edificio.

Si recordamos las progresiones, sabremos qué:

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21 + n = $\frac{n(n-1)}{2}$

Mismas que aplicaremos a continuación.

La función a Maximizar en este caso es el "Interés", al que podemos identificar como la relación entre la Renta y el Costo:

$$I = \frac{R}{C}$$

Renta R = 50,000x

Costo C = $3500000 + 500000x + \frac{x(x-1)}{2}25000$

Entonces:

$$I=\frac{50,000x}{3'500,000+500,000x+\frac{x(x-1)}{2}25,000}=\frac{50x}{3,500+500x+\frac{x(x-1)}{2}25}=$$

$$=\frac{50x}{3500+500x+\frac{25x^2-25x}{2}}=\frac{50x}{\frac{7000+1000x+25x^2-25x}{2}}=\frac{100x}{25x^2+975x+7000}=$$

$$=\frac{4x}{x^2+39x+280}=4x\left(x^2+39x+280\right)^{-1}$$

$I=4x\left(x^2+39x+280\right)^{-1}$, una vez obtenida la expresión simplificada del interés, procederemos a derivarla.

$$I'=4\left(x^2+39x+280\right)^{-1}+4x(-1)\left(x^2+39x+280\right)^{-2}(2x+39)=$$

$$I'=\frac{-4x(2x+39)}{\left(x^2+39x+280\right)^2}+\frac{4}{x^2+39x+280}=\frac{-4x(2x+39)+4\left(x^2+39x+280\right)}{\left(x^2+39x+280\right)^2}=$$

$$I'=\frac{-8x^2-156x+4x^2+156x+1120}{\left(x^2+39x+280\right)^2}=\frac{-4x^2+1120}{\left(x^2+39x+280\right)^2}=$$

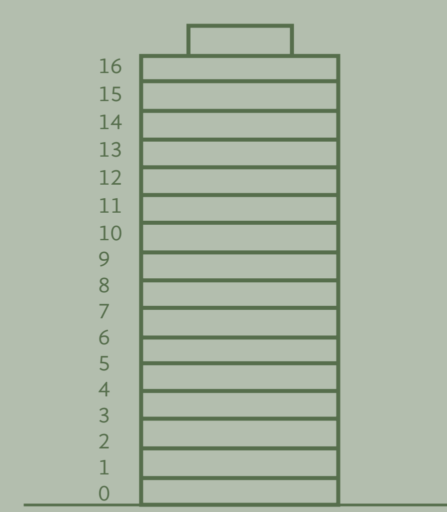
Como buscamos el punto de máximo, debemos igualar con cero a la primera derivada: *I'=0* , por lo que:

$I'=\dfrac{-4x^2+1120}{\left(x^2+39x+280\right)^2}=0$, y simplificando, nos queda:

$-4x^2+1120=0$ , $560=2x^2$ , $x^2=280$

y finalmente $x=\sqrt{280}$ = 16.73 ≈17 pisos

Ahora bien, como necesitamos conocer el interés más alto que se pueda obtener con la inversión, sustituyendo el número de pisos en las expresiones de renta y costo, tendremos:




$R=50,000(17)=850,000$ y

$$C=3'500,000+500,000(17)+\frac{17(17-1)}{2}25,000=$$

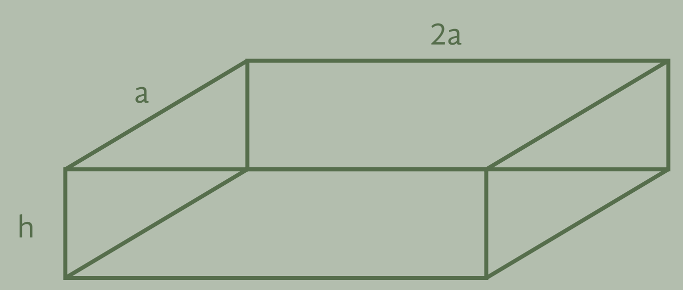
$$=3'500,000+8'500,000+3'400,000=$$

$$I=\frac{R}{C}=\frac{850,000}{15'400,000}=0.0552$$

## Cálculo de volumen máximo

# Problema

**Calcular las dimensiones de un tanque prismático, sin tapa, con un volumen dado, en forma de que uno de sus lados sea el doble del otro, obtenido para tener el área mínima.**




$$V = 2a(a)h = 2a^2h$$

$$S = a(2a) + 2(2a)h + 2ah = 2a^2 + 4ah + 2ah = 2a^2 + 6ah$$

De la ecuación primera se puede despejar h = $\frac{V}{2a^2}$, y sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se tiene:

$$S = 2a^2 + 6a\left(\frac{V}{2a^2}\right) = 2a^2 + 3\left(\frac{V}{a}\right) = 2a^2 + 3Va^{-1}$$

Derivando la expresión anterior, se tiene: $\frac{ds}{da} = 4a - 3Va^{-2}$

Igualando con cero y despejando, queda:

$$4a - 3Va^{-2} = 0$$

$$4a = 3Va^{-2}$$

$$4a = \frac{3V}{a^2}$$

$$4a^3 = 3V$$

$$a^3 = \frac{3V}{4} \therefore a = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}} = \left(\frac{3V}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Por lo tanto:

$$h=\frac{V}{2a^2}=\frac{V}{2\left(\frac{3V}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{V^{\frac{3}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{4^{\frac{2}{3}}}{2(3)^{\frac{2}{3}}}V^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\sqrt[3]{V}=$$

$$h=\frac{1}{2}\sqrt[3]{V\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}=\sqrt[3]{\frac{16V}{8(9)}}=\sqrt[3]{\frac{16V}{72}}=\sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

Aplicando ahora el criterio de la 2ª. Derivada, se tiene: $\frac{d^2S}{da^2}=4+6Va^{-3}>0$, por lo que estamos ante un mínimo.

Ejemplo para este caso: Para un volumen V = $500m^3$, se tiene que:

$$a=\sqrt[3]{\frac{3(500)}{4}}=7.211$$

$$2a=14.22$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{2(500)}{9}}=4.807$$

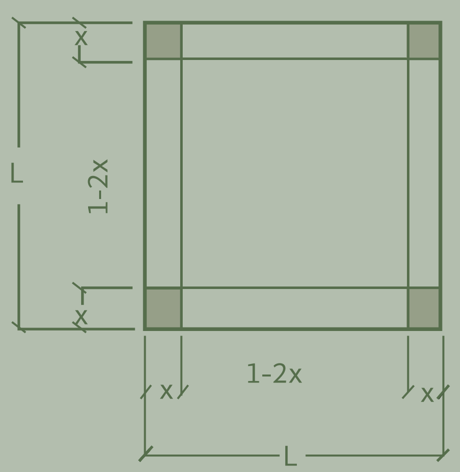
Comprobando y obteniendo datos finales:

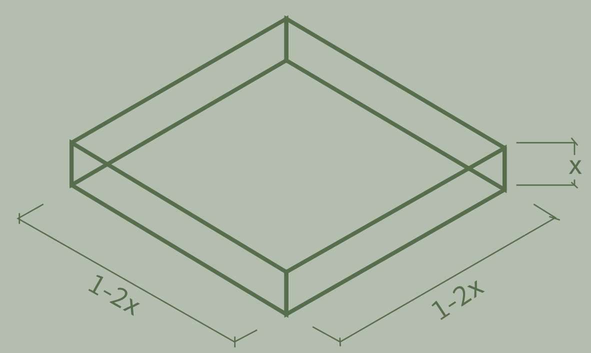
$$V=a(2a)h=7.211(14.422)(4.807)=499.913\approx 500m^3$$

$$S=2\left(a^2\right)+6a(7.211)^2+6(7.211)(4.807)=104+208=312m^2$$

# Problema

**A partir de una lámina cuadrada de lado a se requiere hacer un tanque sin tapa de tal manera que se obtenga el máximo volumen posible.**




Calculemos el Volumen de la caja:

Área de la base = $(l-2x)^2$, altura de la caja = $x$

$V = x(1-2x)^2$ Que es lo que requerimos como máximo.

Ahora desarrollando nos queda:

$V = x\left(l^2 - 4lx + 4x^2\right) = l^2x - 4lx^2 + 4x^3$, ahora obtengamos la derivada:

$V' = l^2 - 8lx + 12x^2$ e igualando con cero, queda: $l^2 - 8lx + 12x^2 = 0$

Ordenando la ecuación con respecto a x, se tiene: $12x^2 - 8lx + l^2 = 0$

ahora bien, queda una ecuación de 2° grado, misma que resolveremos para obtener las raíces.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 - 4(12)l^2}}{24} = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 - 48l^2}}{24} = \frac{8l \pm \sqrt{16l^2}}{24} =$$

$x = \frac{8l \pm 4l}{24}$, ahora bien, tomando el signo + y luego el signo –

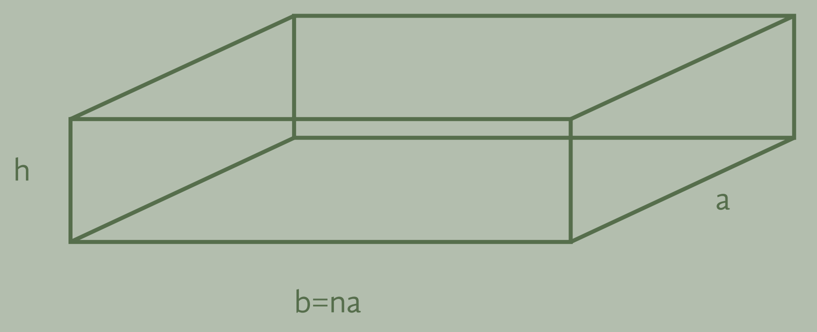
tendremos: $x_1 = \frac{8l + 4l}{24} = \frac{12l}{24} = \frac{l}{2}$

Lo que significa que el corte es a la mitad de la lámina en ambos sentidos, con lo que desperdiciaremos toda la lámina, es el caso del mínimo.

$x_2 = \frac{8l - 4l}{24} = \frac{4l}{24} = \frac{l}{6}$, lo que significa que la altura de la caja deberá ser la sexta parte de la lámina cuadrada de que se dispone para obtener así el volumen máximo posible.

# Problema

**Se requiere hacer un tanque de 100 de capacidad, de base rectangular, de tal manera que un lado sea n veces la longitud del otro. ¿Cuáles deberán ser sus dimensiones para tener un costo mínimo, sabiendo que el de fondo cuesta $ 4,500.00, el de las paredes $3,360.00 y el de la tapa $6,000.00**



Costos: Cb = 4,500
Cp = 3,360
Ct = 6,000

En primer lugar relacionemos los costos en función al de la tapa.

$$Cb = \frac{4500}{6000} = 0.75ct$$

$$Cp = \frac{3360}{6000} = 0.56ct$$

$$Ct = \frac{6000}{6000} = 1.00ct$$

Ahora bien, el volumen se expresará así: $V = a(na)h = na^2h$ y despejando h, queda:

$$h = \frac{V}{na^2} = \frac{100}{na^2}$$

Ahora, analizaremos el costo C:

$$C = na(a)Ct + na(a)Cb + 2nahCp + 2ahCp =$$

$$C = na^2Ct + na^2Cb + 2na(Cp)\frac{100}{na} + 2ahCp =$$

$$C = na^2Ct + na^2(0.75Ct) + 2na(0.56Ct)\frac{100}{na^2} + 2a(0.56Ct)\frac{100}{na^2} =$$

$$C = Ct\left[na^2 + 0,75na^2 + \frac{112}{a} + \frac{112}{na}\right] = Ct\left[1.75na^2 + \frac{112}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$C = Ct\left[1.75na^2 + 112\left(1 + \frac{1}{n}\right)a^{-1}\right]$$

Ahora, derivando e igualando con cero la primera derivada, obtendremos:

$$\frac{dC}{da} = Ct\left[3.5na - 112\left(1+\frac{1}{n}\right)a^{-2}\right] = 0$$

$$3.5a - \frac{112\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a^2} = 0$$

$$3.5na^3 - 112\left(1+\frac{1}{n}\right) = 3.5na^3 - 112\left(\frac{n+1}{n}\right) = 3.5n^2a^3 - 112(n+1) = 0$$

$$3.5n^2a^3 = 112(n+1)$$

$$a^3 = \frac{112(n+1)}{3.5n^2} = \sqrt[3]{\frac{112(n+1)}{3.5n^2}}$$

Ahora si por ejemplo tomamos n = 2, es decir, si uno de los lados es el doble del otro:

$$a = \sqrt[3]{\frac{112(2+1)}{3.5(2)^2}} = \sqrt[3]{\frac{336}{15}} = \sqrt[3]{22.4} =$$

$$a = 2.819m$$

$$b = 2(2.819) = 5.638m$$

$$h = \frac{100}{2(2.819)^2} = 6.292m$$

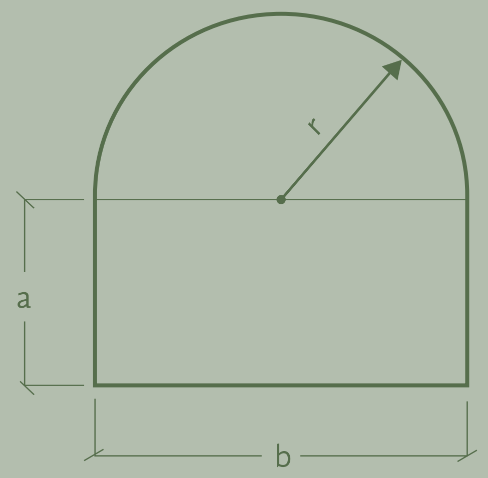
Volumen V = $2.819(5.638)(6.292) = 100m^3$

Ahora con el criterio de la segunda derivada igualada con cero, tendremos:

$\frac{d^2C}{da^2} = Ct\left[3.5n + 112\left(1+\frac{1}{n}\right)a^{-3}\right]$ >0; Por lo tanto estamos ante un mínimo.

# Problema

**Una ventana tiene forma rectangular en la base, rematando en un semicírculo; con un perímetro constante . Encontrar las dimensiones que deben darse para obtener la máxima iluminación.**




La máxima iluminación la dará el área mayor.

$p = 2a + b + \pi r \longrightarrow (1)$ Pero $b = 2r$

$\therefore\ p = 2a + 2r + \pi r = k$

$2a = k - 2r - \pi r$

$\boxed{a = \frac{k - 2r - \pi r}{2}} \longrightarrow (2)$

Área:

$A = ab + \frac{\pi r^2}{2} =$

$A = \frac{k - 2r - \pi r}{2}(2r) + \frac{\pi r^2}{2} = kr - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} =$

$A = kr - r^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$

Derivando e igualando con cero la derivada, queda:

$$\frac{dA}{dr} = k - 2r\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$r = \frac{k}{2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$\boxed{r = \frac{k}{4+\pi}} \longrightarrow (4)$$

Si por la expresión (2) sustituimos el valor de r de la expresión 4, queda:

$$a = \frac{k - 2r - \pi r}{2} = \frac{k - 2\left(\frac{k}{4+\pi}\right) - \pi\left(\frac{k}{4+\pi}\right)}{2} = \frac{\frac{(4+\pi)k - 2k - \pi k}{4+\pi}}{2} =$$

$$a = \frac{4k + \pi k - 2k - \pi k}{2(4+\pi)} =$$

$$a = \frac{2k}{2(4+\pi)} = \boxed{\frac{k}{4+\pi}}$$

O sea que a = r, es decir que el radio del semicírculo debe ser igual a la altura del rectángulo.

Segunda derivada para comprobar el máximo:

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) < 0, \text{ estamos en máximo.}$$

$$\boxed{\therefore b = \frac{2k}{4+\pi}}$$

Si por ejemplo hacemos que k = 9.00m, tendremos:

$$r = \frac{9}{4+\pi} = \frac{9}{7.1416} = \boxed{1.26m}$$

$$a = \frac{9 - 2(1.26) - \pi(1.26)}{2} = \frac{9 - 2.52 - 3.96}{2} = \boxed{1.26m}$$

$$b = 2r = 2(1.26) = \boxed{2.52m}$$

Perímetro: $p = 2(1.26) + 2.52 + \pi(1.26) = 2.52 + 2.52 + 3.96 =$

$\boxed{p = 9.00m}$ Es decir que el radio del semicírculo debe ser igual a la altura del rectángulo, o sea: r = a y b = 2a

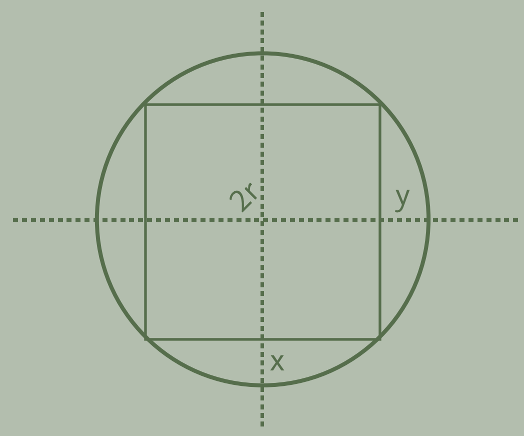
En este caso, el área máxima es:

$$A = ab + \frac{\pi r}{2} = 1.26(2.52) + \frac{\pi(1.26)^2}{2} = 3.1752 + 2.4938 =$$

$$\boxed{A = 5.669m^2}$$

# Problema

**De un tronco de árbol de sección circular, encontrar la sección rectangular de mayor resistencia. Dar las dimensiones del ancho y del alto y calcular su momento de inercia.**




Puesto que la sección del tronco tiene radio r, se tiene que:

$$x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2 \longrightarrow (1)$$

La resistencia dada en función del módulo de sección S, de la viga de sección rectangular es:

$$S = \frac{I_c}{\frac{y}{2}} = \frac{\frac{xy^3}{12}}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{6}xy^2 \longrightarrow (2)$$

De la (1) queda: $y^2 = 4r^2 - x^2 \longrightarrow (1_1)$

De la (2) queda: $y^2 = \frac{6S}{x} \longrightarrow (2_1)$

Haciendo eliminación por igualación, tendremos:

$4r^2 - x^2 = \frac{6S}{x}$ , y despejando a S, se obtiene:

$S = \frac{x(4r^2 - x^2)}{6} = \frac{4r^2x - x^3}{6}$ y sabiendo que $0 < x < 2r$

Derivando respecto *a x e* igualando con cero, quedará:

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{6}\left(4r^2-3x^2\right)$$

$$\frac{1}{6}\left(4r^2-3x^2\right)=0$$

$$4r^2-3x^2=0$$

$$3x^2=4r^2$$

$$x^2=\frac{4r^2}{3}$$

Luego la base será: $\boxed{x_1=\frac{2r}{\sqrt{3}}}$

Y $x_2=\frac{-2r}{\sqrt{3}}$ que es negativa, luego la desechamos
La segunda derivada nos da el criterio para ver si es máximo o si es mínimo, por lo que tenemos:

$\frac{d^2S}{dx^2}=\frac{1}{6}(-6x)=-x$, al ser negativa estamos ante un máximo.

Sustituyendo el valor de $x_1$ en la ecuación (1), tendremos:

$$\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2+y^2=4r^2$$

$$\left(\frac{4r^2}{3}+y^2\right)=4r^2$$

$$y_1=\sqrt{4r^2-\frac{4r^2}{3}}=\sqrt{4r^2\left(1-\frac{1}{3}\right)}=$$

$\boxed{y_1=2r\sqrt{\frac{2}{3}}}$ Que es la altura.

Ahora, suponiendo que r = 15cm., tendremos:

$$x_1=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2(15)}{\sqrt{3}}=17.32cm$$

$$y_1=2r\sqrt{\frac{2}{3}}=2(15)\sqrt{\frac{2}{3}}=30\sqrt{0.666}=24.50cm$$

Recordando que el momento de inercia centroidal es $I=\frac{bh^3}{12}$
El momento de inercia buscado será entonces:

$$I_c=\frac{17.32(24.50)^3}{12}=21,225.84cm^4$$

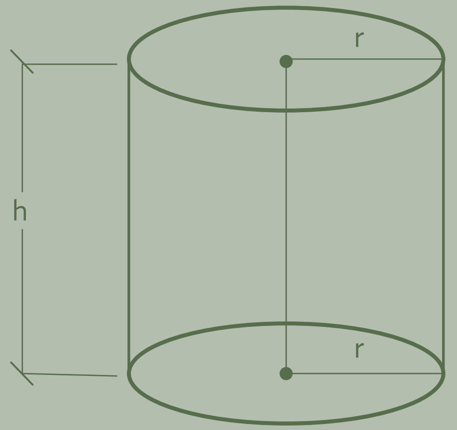
# Problema

**Diseñar el tanque cilíndrico más económico para una capacidad de 800m³ , sabiendo que el m² de tapa cuesta $ 400.00, el de la base $ 200.00 y el de las paredes $ 360.00**

Costos: Ct = 400

Cb = 200

Cp = 360




Si se hace la relación de todos los costos con el de la tapa, se tiene:

$$Ct = \frac{400}{400} = 1ct$$

$$Cb = \frac{200}{400} = 0.50ct$$

$$Cp = \frac{360}{400} = 0.90ct$$

Volumen: V= $\pi r^2 h$ y por lo tanto $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{800}{\pi r^2}$

Costo Total:

$$C = \pi r^2 ct + \pi r^2 cb + 2\pi rhcp$$

$$C = \pi r^2 ct + \pi r^2 (0.5ct) + 2\pi r \left(\frac{800}{\pi r^2}\right)(0.9ct)$$

$$C = \pi ct\left[r^2 + 0.5r^2 + \frac{1440}{\pi r}\right]$$

$$C = \pi ct\left[1.5r^2 + \frac{1440}{\pi}r^{-1}\right]$$

Derivando *e* igualando con cero, queda:

$$\frac{dC}{dr} = \pi ct\left[3r - \frac{1440}{\pi}r^{-2}\right] = 0$$

$$3r = \frac{1440}{\pi r^2} = 0$$

$$3\pi r^3 - 1440 = 0$$

$$3\pi r^3 = 1440$$

$$r^3 = \frac{1440}{3\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1440}{3\pi}} = \sqrt[3]{\frac{480}{3.1416}} = 5.346m.$$

$$h = \frac{800}{\pi(5.346)^2} = 8.91m.$$

$$V = \pi(5.346)^2(8.91) = 800m^3$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene:

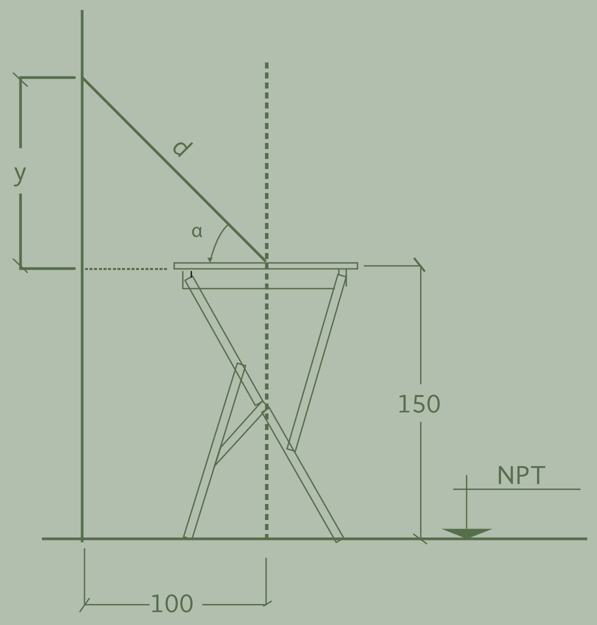
$\frac{d^2C}{dr^2} = \left[3 + 2880r^{-3}\right]$ >0, por lo que estamos ante un mínimo.

## Optimización de iluminación

# Problema

**Tengo mi restirador de trabajo a un metro del muro y trato de saber a qué altura del muro tengo que colocar un foco para que la iluminación sea máxima.**

**La altura del restirador es de 1.50 y la intensidad es de 60 watts.**




$$I = \frac{60}{d^2} sen\alpha$$

$$d^2 = 1 + y^2$$

$$sen\alpha = \frac{y}{d} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$I = \frac{60}{1+y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{60y}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ahora, obteniendo la primera derivada

$$I = 60y\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$I' = 60\left[y\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2y)+\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(1)\right]$$

Igualándola con cero:

$$60\left[-3y^2\left(1+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]=0$$

$$-3y^2\left(1+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}=0$$

$$\left(1+y^2\right)^{\frac{5}{2}}\left[-3y^2\left(1+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}+\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]=0$$

$$-3y^2+1+y^2=0$$

$$1-2y^2=0$$

$$2y^2=1$$

$$y^2=\frac{1}{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.4142}{2}=\boxed{0.7071}$$

Luego la altura del foco deberá ser:

$$1.50(0.7071)=\boxed{2.21mt.}$$

# Problema

**Una compañía de teléfonos observa que por cada aparato que sobrepasa mil; pierde un centavo y que por cada aparato menor que mil, gana $ 15.00. ¿Cuántos aparatos le darán la máxima ganancia?**

$$G = (x - 1000)(1500 - x)$$

$$G = 1500x - x^2 - 1500000 + 1000x$$

$$G = -x^2 + 2500x - 1500000$$

$$G' = -2x + 2500$$

$$-2x + 2500 = 0$$

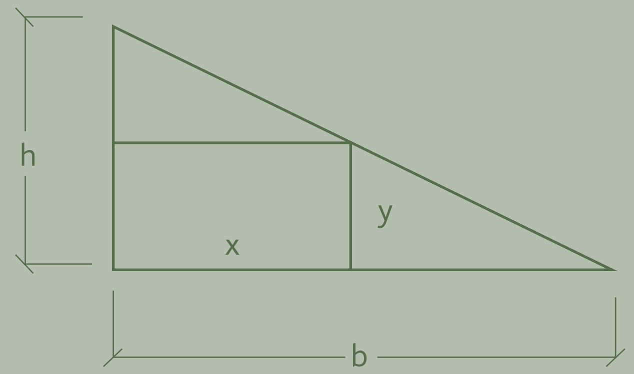
$$2500 = 2x$$

$$x = \frac{2500}{2} = \boxed{1,250}$$

Ahora con el criterio de la segunda derivada, veamos si fue el máximo:
$G'' = -2 < 0$, por lo tanto hay máximo.

# Problema

**Este caso ejemplifica cómo obtener lo más posible de algo que ya no se puede comercializar como está. Se tiene un trozo de vidrio con la forma de un triángulo rectángulo y quiero cortar el mayor trozo posible de vidrio rectangular.**




$A = xy$ Que es el área que buscamos.

Ahora, haciendo una relación de triángulos semejantes podremos eliminar a una de las 2 incógnitas. Observemos la figura.

$$\frac{y}{h} = \frac{b-x}{b}$$

$$y = \frac{h}{b}(b-x)$$

Sustituyendo el nuevo valor de y, queda:

$A = x\left[\frac{h}{b}(b-x)\right] = \boxed{\frac{h}{b}(bx-x^2)}$ Que es la expresión equivalente al área buscada.

Obtengamos la derivada correspondiente:

$$A' = \frac{h}{b}(b-2x)$$

Y haciéndola igual a cero, tendremos:

$$\frac{h}{b}\left(b-2x\right)=0$$

$$b-2x=0$$

$$\boxed{x=\frac{b}{2}}$$

Apliquemos el criterio de la segunda derivada para saber si hay máximo:

$A''=\dfrac{-2h}{b}< 0$, por lo tanto se trata de un máximo.

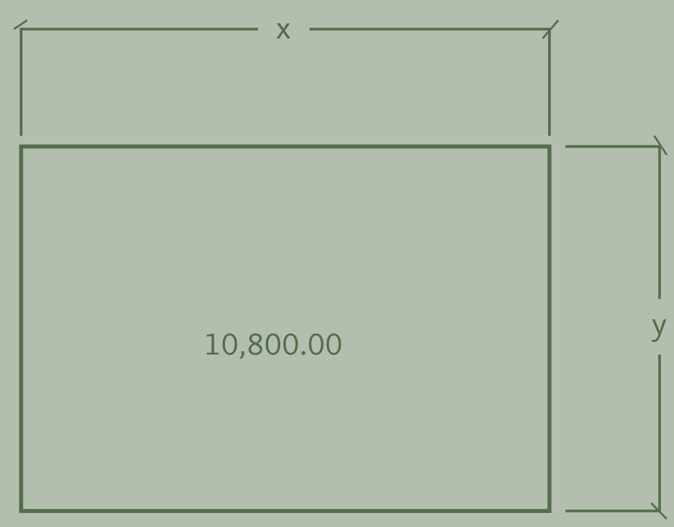
Ahora despejemos y, que será la altura del rectángulo buscado:

$$y=\frac{h}{b}\left(\frac{b}{2}\right)=\boxed{\frac{h}{2}}$$

Concluyendo, el rectángulo de mayor área posible que se puede obtener de un trozo de forma de triángulo rectángulo será aquel que tenga como base la mitad de la base del triángulo y como altura la mitad de altura del triángulo.

# Problema

**Un señor desea cercar su terreno, pero gastando lo mínimo posible en la barda. ¿Qué dimensiones dará este señor a su barda si la superficie del terreno es de 10,800.00m2 y además su vecino pagará la mitad de la cerca medianera?**




$$B = x + \frac{x}{2} + 2y$$

$$B = \frac{3x}{2} + 2y$$

Ahora, eliminando a la incógnita de y se tiene:

$$A = bh = xy = 10,800.00m^2$$

$$y = \frac{10800}{x}$$

Entonces:

$$B = \frac{3x}{2} + \frac{21600}{x},$$

ahora bien, obtengamos la derivada de esta expresión:

$$B' = \frac{3}{2} - 21600x^{-2} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{21600}{x^2}},$$

ahora igualándola con cero, nos quedará:

$$\frac{3}{2}-\frac{21600}{x^2}=0$$

$$\frac{3}{2}=\frac{21600}{x^2}$$

$$x^2=\frac{43200}{3}=14,400$$

$$\boxed{x=120m}$$

Segunda derivada:

$B''=43200x^{-3}=\frac{43200}{x^3}=\frac{43200}{(120)^3}$, por lo que hay mínimo.

Ahora, despejemos a y:

$$y=\frac{10800}{120}=\boxed{90m.}$$

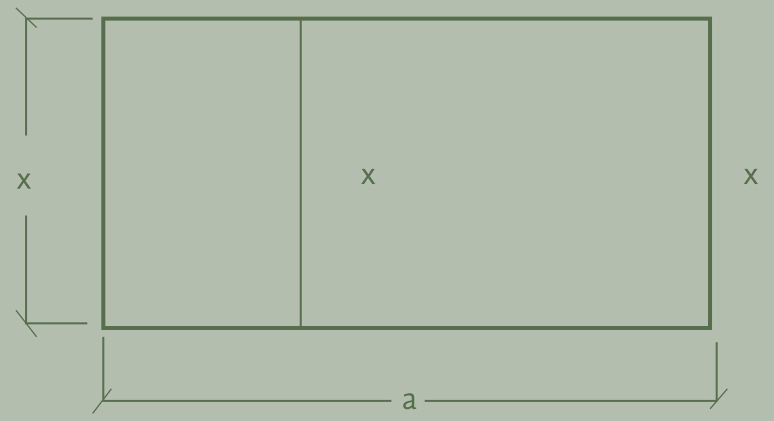
Y comprobando los resultados tenemos:

$A=90(120)=10,800m^2$, luego estamos correctos.

# Problema

**Se requiere construir una barda en el perímetro de un terreno de forma rectangular y dividir con una barda paralela a uno de sus lados dicho lote en dos partes.**

**Si el área del terreno es conocida, encontrar la relación de los lados para que la longitud total de todas las bardas sea la mínima.**




Área = a

$$A = ax$$

$$a = \frac{A}{x}$$

Perímetro = p

$$p = 2a + 3x$$

$$p = 2\left(\frac{A}{x}\right) + 3x = 2Ax^{-1} + 3x$$

Ahora, derivando e igualando con cero, se tiene:

$$\frac{dp}{dx} = -2Ax^{-2} + 3 = 0$$

$$-\frac{2A}{x^2}+3=0$$

$$-2A+3x^2=0$$

$$3x^2=2A$$

$$x^2=\frac{2A}{3}$$

$$\boxed{x=\sqrt{\frac{2A}{3}}}$$

Ahora bien,

$$a=\frac{A}{x}=\frac{A}{\sqrt{\frac{2A}{3}}}=\frac{\sqrt{3}A}{\sqrt{2A}}=\frac{\sqrt{3}A^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{2}A^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}}=\boxed{\sqrt{\frac{3A}{2}}}$$

Relación entre los lados:

$$\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{\frac{2A}{3}}}{\sqrt{\frac{3A}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{2A}{3}}{\frac{3A}{2}}}=\sqrt{\frac{4A}{9A}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Comprobando ahora si se trata de un mínimo con la segunda derivada, tenemos:

$\frac{d^2p}{dx^2}=4Ax^{-3}$ >0; se trata de un mínimo

Si le damos valores, como los del problema anterior, tendríamos por ejemplo:

$$A=10{,}800m^2$$

$$x=\sqrt{\frac{2(10{,}800)}{3}}=\boxed{84.853m}$$

Relación entre los lados:

$$a=\sqrt{\frac{3(10{,}800)}{2}}=\boxed{127.279m}$$

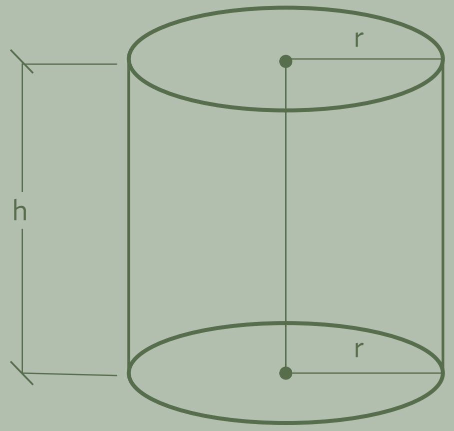
$\frac{x}{a}=\frac{84.853}{127.279}=\frac{2}{3}$, tal y como se calculó

Perímetro:

$$p=2(127.279)+3(84.853)=\boxed{509.117ml.}$$

# Problema

**Para una obra determinada que se encuentra ubicada en un lugar en donde no es fácil encontrar agua, me vi en la necesidad de construir un tanque cilíndrico sin tapa para contener un volumen de agua de 10m³ pero buscando las dimensiones de éste, para que la cantidad de metal por utilizar fuera el mínimo y, por lo tanto, el costo más bajo.**




En primer lugar, determinamos que ecuaciones debo utilizar en este proceso matemático:

| | |
|---|---|
| Volumen | $V = \pi r^2 h$ |
| Área de las paredes | $Al = 2\pi rh$ |
| Área total paredes y base | $At = 2\pi rh + \pi r^2$ |

Como $V = \pi r^2 h$, de ella despejemos h:

$$10 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{10}{\pi r^2}$$

Ahora, sustituyamos en la expresión del área total:

$$At = 2\pi r\left(\frac{10}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{20}{r} + \pi r^2$$

Como es el área de metal la que debemos calcular como mínimo, derivemos la expresión:

$$A' = -\frac{20}{r^2} + 2\pi r = \frac{-20 + 2\pi r^3}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 20}{r^2}$$

Ahora, igualemos con cero esta derivada:

$$\frac{2\pi r^3 - 20}{r^2} = 0$$

$$\pi r^3 - 10 = 0$$

$$r^3 = \frac{10}{\pi}$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{2.1543}{\sqrt[3]{\pi}} = 1.4710$$

Sustituyamos ahora el valor de r para obtener el de h:

$$h = \frac{10}{\pi\left(\frac{2.1543}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = 1.4710$$

Área total = 20.39 $m^2$

# Problema

**Se requiere calcular dos números cuya suma sea 125 y que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea el máximo posible.**

Si uno de los números es x, entonces el otro será $125-x$

$P=(125-x)x^2$, que es la expresión del producto que se nos pide como máximo.

Aplicaremos como ejercicio el criterio de las derivadas sucesivas, en este caso, la segunda derivada para obtener el máximo.

$$P=(125-x)x^2$$

$$P'=(2x)(125-x)+(-1)x^2=250x-2x^2-x^2=250x-3x^2$$

Segunda derivada:

$$P''=250-6x$$

El resultado de la primera derivada lo hacemos igual a cero y resolviendo la ecuación obtenemos las raíces:

$$250x-3x^2=0$$

$$x(250-3x)=0$$

$$x_1=0,$$

Que es una de las raíces, y

$250-3x=0$

$3x=250$

$x_2=\dfrac{250}{3}$

Que es la otra raíz.

Ahora, sustituyendo los valores respectivos en la segunda derivada encontramos:

$P''=250-6x$, para el valor de $x_1=0$, se tiene: $250-6(0)=250$ y como 250 > 0 hay un mínimo.

Sustituyendo el valor de $x_2=\dfrac{250}{3}$, se tiene:

$250-6x=250-6\left(\dfrac{250}{3}\right)=250-500=-250$, por lo que $-250<0$,

entonces hay un máximo.

La solución será entonces: uno de los números es $\dfrac{250}{3}$ y el otro número es:

$125-\dfrac{250}{3}=\dfrac{125}{3}$, si deseamos comprobarlo, se tiene:

$\dfrac{250}{3}+\dfrac{125}{3}=\dfrac{375}{3}=125$

$\dfrac{125}{3}\left(\dfrac{250}{3}\right)^2=\dfrac{7812500}{27}=289,351.85$

# Capítulo 6

## CÁLCULO INTEGRAL



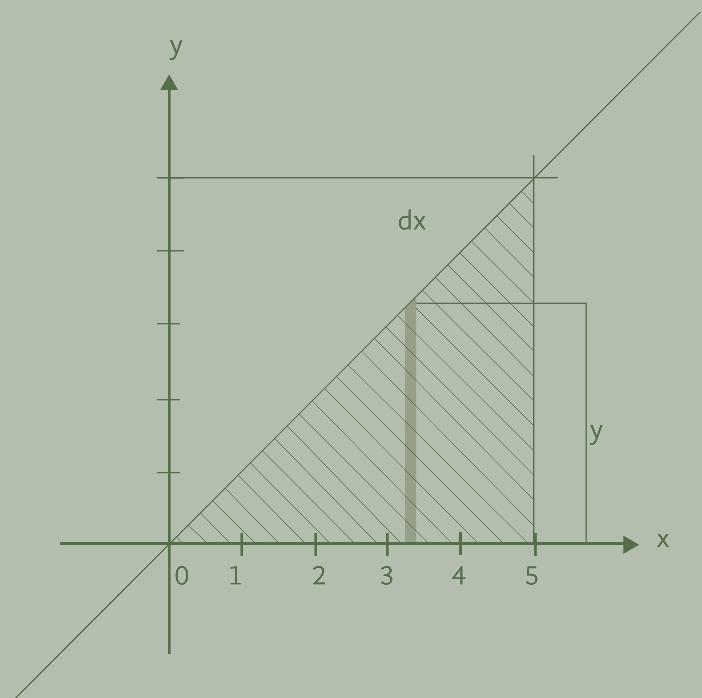
Índice

# Área bajo la curva

Aplicando los conocimientos del cálculo integral, podemos valuar áreas, por ejemplo:

# Problema

**Hallar el área comprendida entre la recta $y = x$ y el eje de las X, para valores de abscisas del 1 al 5.**




Por nuestros conocimientos de analítica sabemos que al ser la ecuación de la recta y = x, se trata de una recta con pendiente positiva y a 45° y que como carece de término independiente pasa por el origen de coordenadas.

Consideraremos una fajita vertical (diferencial de área, dA) que recorrerá desde el origen hasta el valor de abscisa 5.

El área de la fajita será igual a $ydx$, y se desplazara desde 0 hasta 5.

$\int_0^5 ydx$ Pero como $x = y$ podemos sustituirla y por lo tanto efectuar la integral con relación a la $dx$.

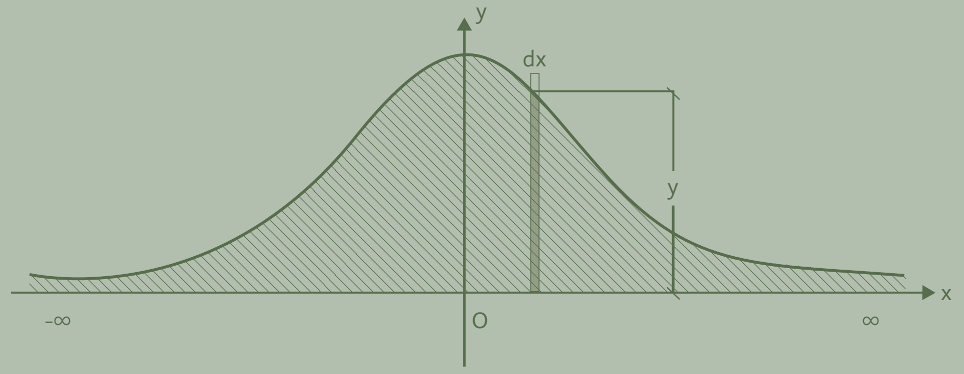
$\int_0^5 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = 12.5 - 0 = \boxed{12.50u^2}$ Que es el área buscada.

# Problema

**Hallar el área bajo la curva, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje $x', x$. Para conocer la curva hágase una tabulación.**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-\infty$ | 0 |
| 0 | 1 |
| $\infty$ | 0 |

Entonces la curva es:




$$A=\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$ ; Pero como $\dfrac{1}{1+x^2}=ang\ \tan\ x$

Quedará:

$$A=\left[ang\ \tan\ x\right]_{-\infty}^{\infty}=ang\ \tan\ \infty\ -\ ang\ \tan\ -\infty$$

$$A=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

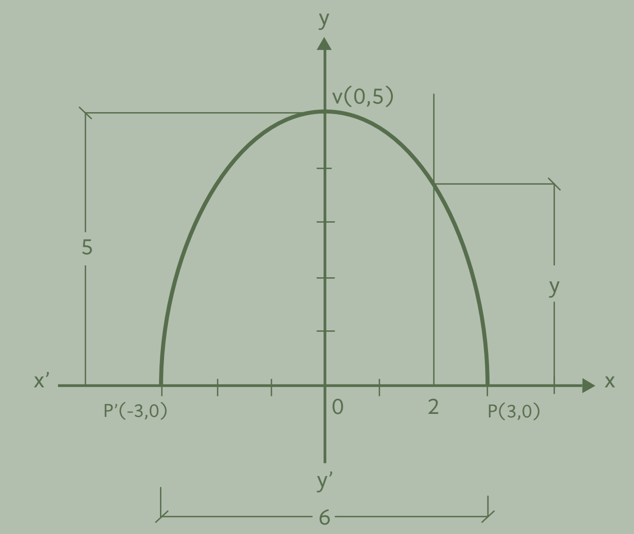
# Problema

**Retomado el problema de la parábola visto en geometría analítica relativo a un arco en forma parabólica de 5.00 m de altura en el vértice y de base 6.00 m.**

**Repasemos cómo se puede calcular la altura de un manguete que pase a 2.00 m del eje de simetría, así como la superficie de todo el arco parabólico para determinar el costo de la cancelería de aluminio y del cristal correspondiente.**

**Se requiere calcular la longitud de un manguete de aluminio que se tiene que ubicar en ambos lados, a 2.00 m del eje central o de simetría del arco.**

**Como el arco parabólico es simétrico con respecto a un eje, hagamos coincidir ese eje con el eje Y´Y y al eje X´X como base del arco.**




Dando los valores que se plantean, el vértice será V (0,5) y por lo tanto la ecuación de ese arco será:

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

$$(x-0)^2 = -4a(y-5)$$

Por los datos del problema, sabemos que la curva en su base pasa por el punto P (3,0), y por lo tanto si estas coordenadas se sustituyen en la ecuación, esta debe satisfacerse.

$$(3-0)^2 = -4a(0-5)$$

$9 = 20a$

$a = \frac{9}{20}$

Por consiguiente, $(x-0)^2 = -4\left(\frac{9}{20}\right)(y-5)$

$$(x-0)^2 = -1.8(y-5)$$

Ahora, tomando la medida de 2.00m a partir del eje de simetría, pues estamos buscando la altura del manguete vertical que se encuentra a esa distancia.

$(2-0)^2 = -1.8(y-5)$

$4 = -1.8y + 9$

$y = \frac{-5}{-1.8} = \boxed{2.77m}$

Que es la dimensión buscada.

Calculemos ahora la superficie del arco parabólico.
La ecuación del arco es

$(x-0)^2 = -1.8(y-5)$

Despejemos a la y de la ecuación para encontrar la diferencial del área:

$x^2 = -1.8y + 9$

$x^2 - 9 = -1.8y$

$y = \frac{x^2 - 9}{-1.8}$

$y = \frac{x^2}{-1.8} + 5$

Ahora la diferencial de área que recorrerá toda la figura será
Por lo que:

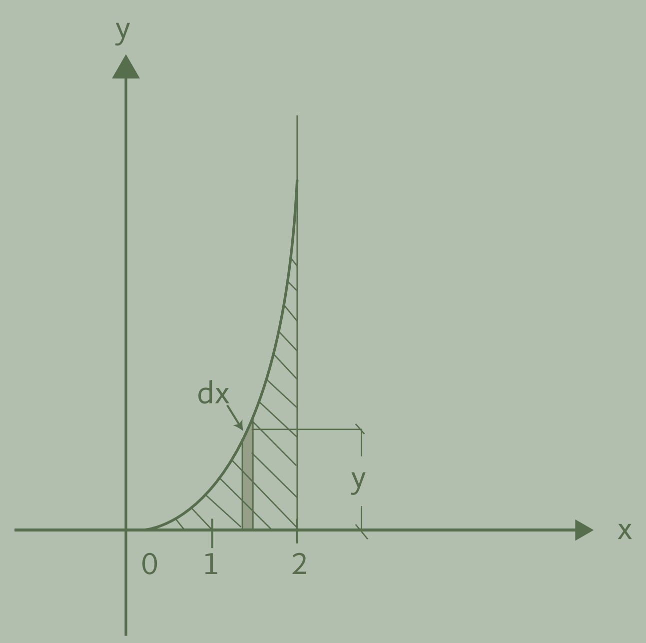
$$A = \int_{-3}^{3} dA = \int_{-3}^{3} y dx = \int_{-3}^{3} \left(\frac{-x^2}{1.8} + 5\right) dx = \int_{-3}^{3} \frac{-x^2}{1.8} dx + \int_{-3}^{3} 5 dx =$$

$$= \frac{-1}{1.8}\int_{-3}^{3} x^2 dx + 5\int_{-3}^{3} dx = \frac{-1}{1.8}\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{3} + 5(x)_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{-1}{1.8}\left(\frac{27}{3} - \frac{-27}{3}\right) + 5(3-(-3)) = \frac{-1}{1.8}\left(\frac{54}{3}\right) + 5(6) = \frac{-54}{5.4} + 30 = 20m^2$$

# Problema

**Se requiere calcular el área de un tímpano, el que se forma entre una parábola y dos rectas, véase la figura siguiente.**



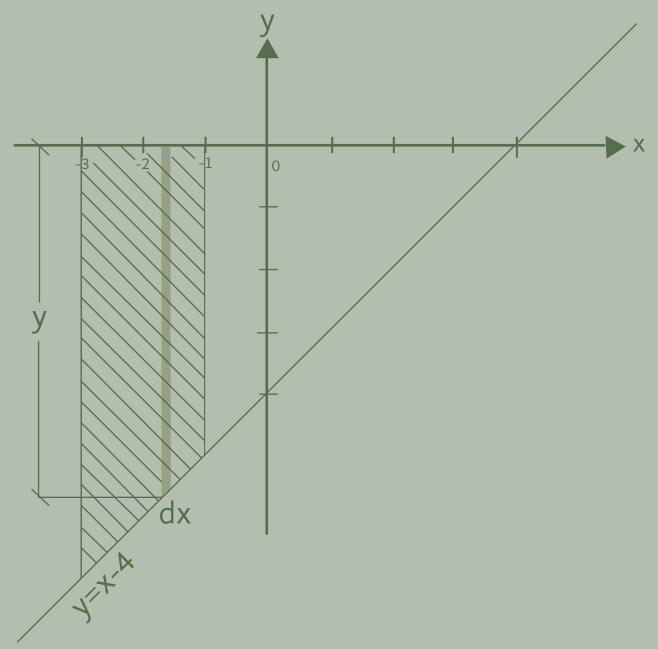

La ecuación de la parábola es en este caso $y = x^2$ y la recta será el eje de las X, para valores desde 0 hasta 2

$$A = \int_0^2 ydx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = \boxed{2.66u^2}$$

Que es el área buscada.

# Problema

**Calcular el área comprendida entre la recta y = x – 4, entre** $x_1 = -3$ **y** $x_2 = -1$




$$A = \int_{-3}^{-1} (x-4)dx = \int_{-3}^{-1} xdx - 4\int_{-3}^{-1} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-1} - 4[x]_{-3}^{-1} =$$

$$A = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} - [(-4)(-1) - (-4)(-3)] = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} - [4-12] = -4-8 = \boxed{-12}$$

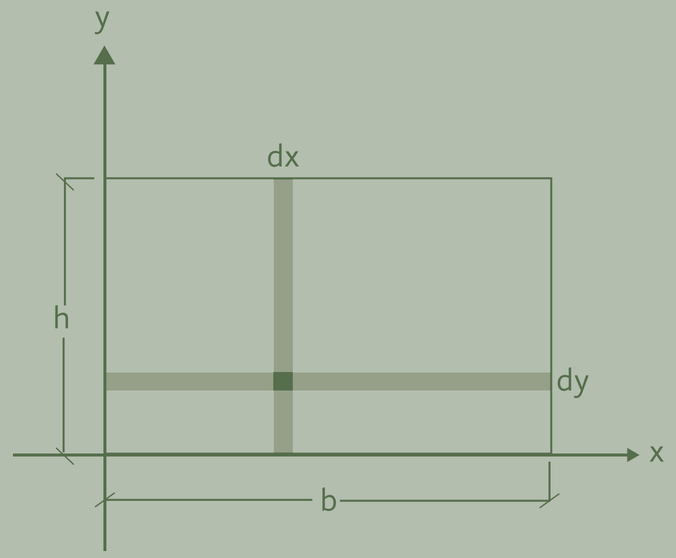
La respuesta como vemos es $A$=-12u² , aparentemente es una incongruencia, pues si son unidades cuadradas siempre serán positivas, lo que sucede en este caso es que como el área buscada se encuentra por debajo del eje X´X, el resultado salió negativo.

# Problema

**Como algo curioso, el lector ¿se puede acordar en qué grado de sus estudios conoció y aprendió la fórmula para calcular el área de un rectángulo?**

**El suscrito en primaria.**

**Pero esa expresión fue el resultado de la aplicación del cálculo integral, veamos como:**



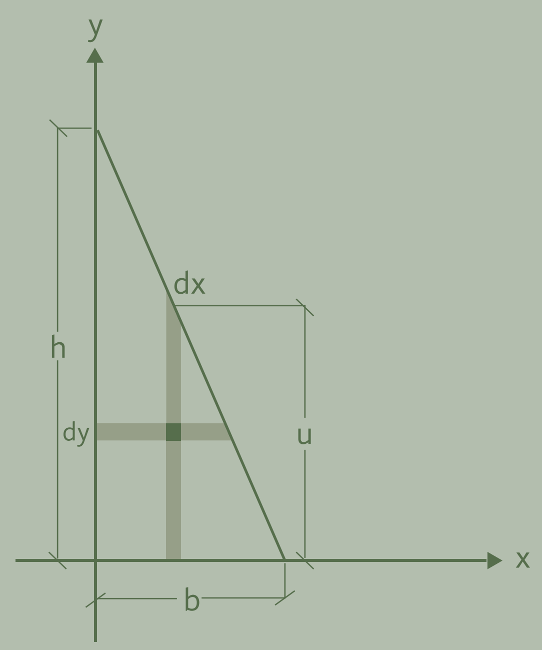

Utilizando la integral doble:

$$A = \int_0^b \int_0^h dxdy = \left[x\right]_0^b \left[y\right]_0^h = bh$$

Análogamente, el área de un triángulo tan conocida por nosotros $A = \frac{bh}{2}$, también se obtuvo a partir de la aplicación del cálculo integral, de la manera siguiente.

# Problema

**Hagamos una relación de triángulos semejantes para poner una incógnita en función de la otra.**




$\frac{u}{h} = \frac{b-x}{b}$ y despejando u, queda: $u = \frac{h}{b}(b-x)$

Ahora calculemos el área:

$$A = \int_0^b \int_0^u dxdy = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} dxdy = b\int_0^b [y]_0^{\frac{h}{b}(b-x)} = \int_0^b \frac{h}{b}(b-x)dx =$$

$$A = \frac{h}{b}\left[bx - \frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{h}{b}\left(b^2 - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{h}{b}\left(\frac{b^2}{2}\right) = \boxed{\frac{bh}{2}},$$

que es el área buscada.

# Centroides

En la práctica profesional, he tenido que manejar centroides o centros de gravedad, en aspectos de criterio general para el diseño arquitectónico de cierto tipo de edificios, de muros de contención, etcétera.

Recordemos un poco el tema:

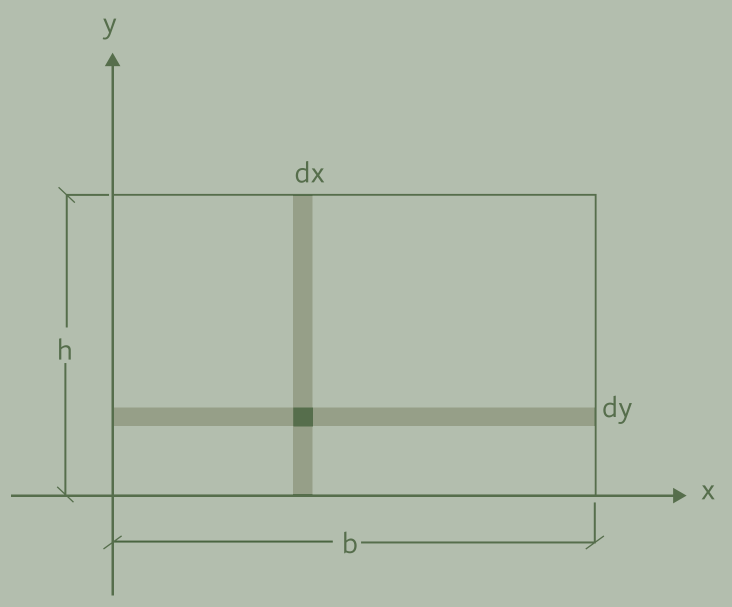
# Problema

**Obtener el centroide de una figura plana, en este caso, de un rectángulo de base b y de altura h.**

**Como sabemos, las coordenadas del Centroide están dadas por las expresiones:**

$$\bar{x} = \frac{\int x da}{A} ; \bar{y} = \frac{\int y da}{A}$$

En el caso de un rectángulo, se tendrá:



$$A = bh$$

$$dA = hdx$$

$$\int xdA = \int_0^b xhdx = h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{hb^2}{2}$$

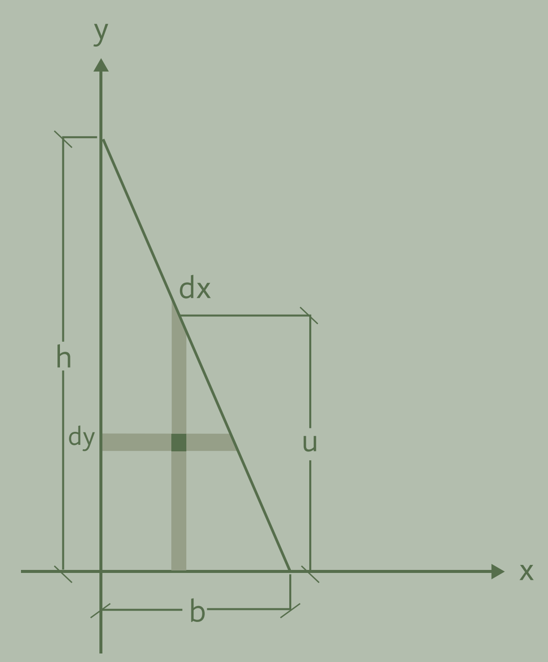
Por lo que el valor de la abscisa del centroide será:

$\bar{x} = \frac{\int xda}{A} = \frac{\frac{hb^2}{2}}{bh} = \frac{hb^2}{2bh} = \boxed{\frac{b}{2}} =$ , es decir, a la mitad de la base y

análogamente la ordenada será $\boxed{\frac{h}{2}}$, o sea, a la mitad de la altura.

Aplicándolo a un triángulo.

Recordemos cómo se obtiene su centroide:




$A = \frac{bh}{2}$ Y estableciendo una relación de triángulos semejantes para quedarnos con una sola variable, se tendrá:

$\frac{u}{h} = \frac{b-x}{b}$ ; De donde $u = \frac{h}{b}(b-x)$

y por lo tanto, $dA = udx = \frac{h}{b}(b-x)dx$

Entonces:

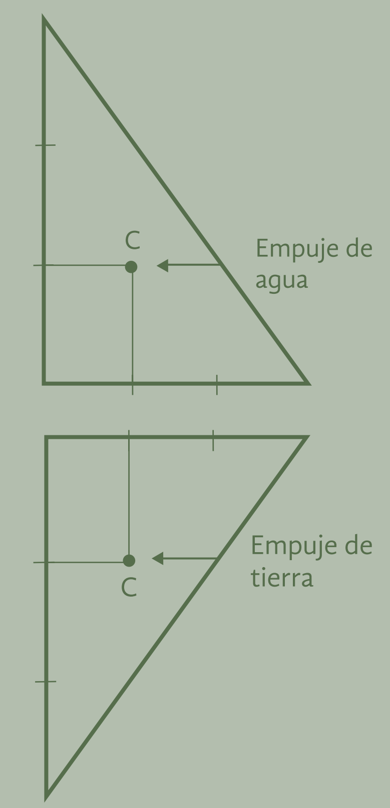
$$\int xdA = \frac{h}{b}\int_0^b x\left(b-x\right)dx = \frac{h}{b}\int_0^b \left(xb - x^2\right)dx =$$

$$\frac{h}{b}\int_0^b bxdx - \frac{h}{b}\int_0^b x^2dx = \frac{hb}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b =$$

$\dfrac{hb^2}{2} - \dfrac{h}{b}\left(\dfrac{b^3}{3}\right) = \dfrac{h}{b}\left(\dfrac{b^3}{6}\right) = \dfrac{hb^2}{6}$, ahora, sustituyendo en la expresión de la abscisa del centroide, tendremos:

$\bar{x} = \dfrac{\int xda}{A} = \dfrac{\frac{hb^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \dfrac{2hb^2}{6bh} = \boxed{\dfrac{b}{3}}$, es decir, a la tercera parte de la base y análogamente la ordenada del centro de gravedad será a la tercera parte de la altura, $\boxed{\dfrac{h}{3}}$

El centroide de un triángulo nos sirve al conocerlo para determinar con claridad el empuje de tierras y de aguas, conocimiento fundamental para el diseño de muros de contención y de albercas o tanques para el almacenamiento de agua.

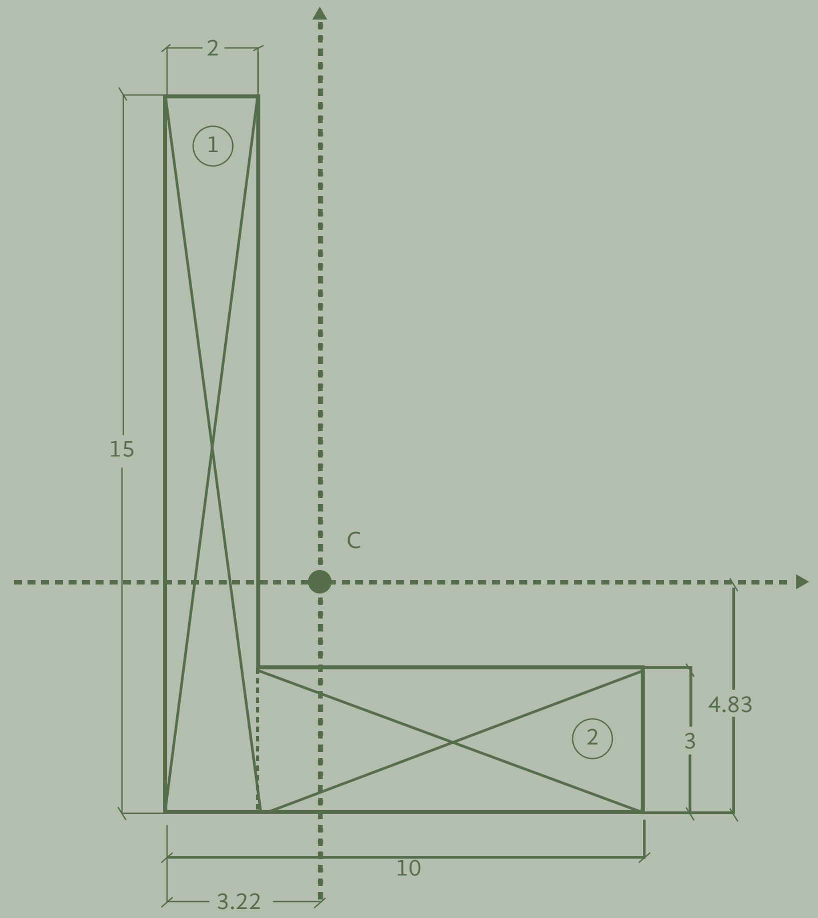


Si ponemos en práctica el conocimiento que tenemos ahora de los centroides, encontraremos clara la siguiente aplicación, que aunque es matemática se aplicará directamente a la comprensión del comportamiento sísmico de un edificio y aprenderemos cómo se debe diseñar arquitectónicamente en función de la junta de construcción para evitar torsiones.

Conociendo las coordenadas del centro de gravedad de los rectángulos, resolveremos el siguiente:

# Problema

**Determinar el centroide de la siguiente figura, que puede corresponder a la planta de un edificio.**



Para la solución, construiremos una tabla para agilizar los cálculos.

Determinación del centroide.

| AS | Xm | Ym | Ax | Ay |
|---|---|---|---|---|
| 30.00 | 1.00 | 7.50 | 30.00 | 225.00 |
| 24.00 | 6.00 | 1.50 | 144.00 | 36.00 |
| 54.00 | | | 174.00 | 261.00 |

$$\bar{x} = \frac{174}{54} = 3.22$$

$$\bar{y} = \frac{261}{54} = 4.83$$

Esto es que el centroide de la figura tiene como coordenadas C (3.22, 4.83).

Como se ve, el centroide queda fuera del área de la figura, lo que traerá como consecuencia que existirá una torsión muy fuerte provocada por un sismo y la estructura podrá colapsarse.

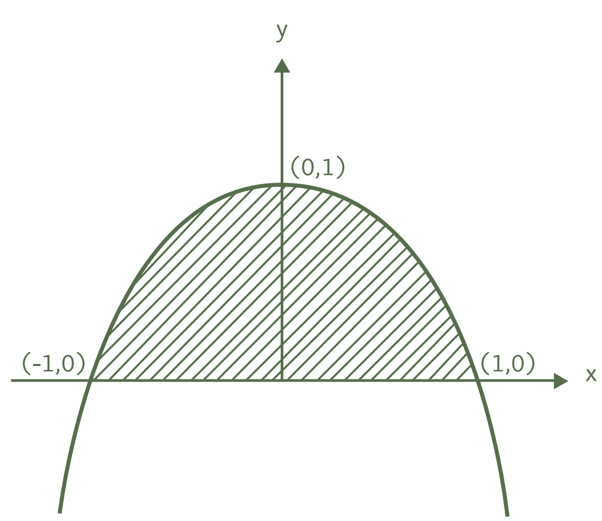
Lo que tendremos que hacer es dividir la figura en dos partes y resolver arquitectónicamente esa junta de construcción para que cada rectángulo trabaje independiente y se eviten así las excentricidades que provocan las torsiones.

# Centro de una superficie parabólica

El caso es obtener las coordenadas del centroide de la superficie definida por la curva $y = 1 - x^2$ y el eje X´X.

Construyamos la figura correspondiente haciendo una tabulación:

| x | y |
|---|---|
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | -3 |




Se puede observar que la figura tiene un eje de simetría, el eje Y´Y, por lo que el Centroide necesariamente se localizará en ese eje, por lo que la abscisa del punto estará con valor 0 y habrá que calcular únicamente el valor de la ordenada $\overline{y}$.

La expresión que corresponde es $\overline{y} = \dfrac{\int ydA}{A}$.

Comencemos por calcular el numerador de este quebrado;

$$\int_0^1 ydA = \int_0^1 y(2xdy) = 2\int_0^1 xydy$$

Como se tiene que resolver la integral de x con relación a dy, tendremos que sustituir a x por su equivalente en y.

La ecuación de la curva es: y = 1-x2, de donde

$$x^2 = 1 - y \therefore x = \sqrt{1-y}$$

Y finalmente la expresión queda como sigue

$$2\int_0^1 y(\sqrt{1-y})dy$$

Ahora bien, se utilizará el procedimiento de cambio de variable para resolver la integral, como sigue:

$$u = \sqrt{1-y} \therefore u^2 = 1-y$$

Y de esta expresión se desprende que:

$$y = 1-u^2$$

De la expresión $u^2 = 1\text{-}y$ obtenemos las diferenciales:

$2udu = \text{-}dy$ Y cambiando signos queda; $dy = \text{-}2udu$

Ingresando a la expresión y sustituyendo la variable quedará:

$$\int_0^1 y(\sqrt{1-y})dy = \int_0^1 (1-u^2)u(-2udu) = 2\int_0^1 (u-u^3)udu =$$

$$2\int_0^1 (u^2-u^4)du = 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_0^1 - 2\left(\frac{u^5}{5}\right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15} = \bar{y}$$

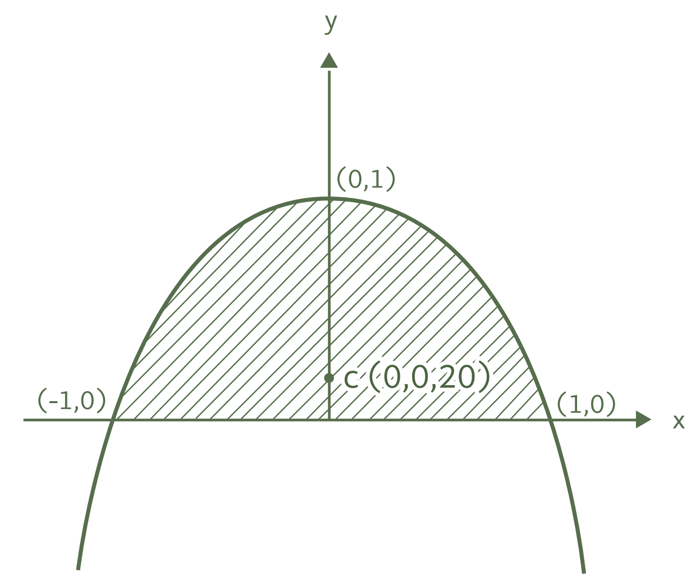
Ya tenemos la solución del numerador de la expresión inicial, ahora falta hallar el área de la figura que es el denominador de la expresión.

$$A = \int_{-1}^{1} dA = \int_{-1}^{1} ydx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = [x]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$-1 - (-1) - \left[\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{3}\right)\right] = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$ ; y finalmente

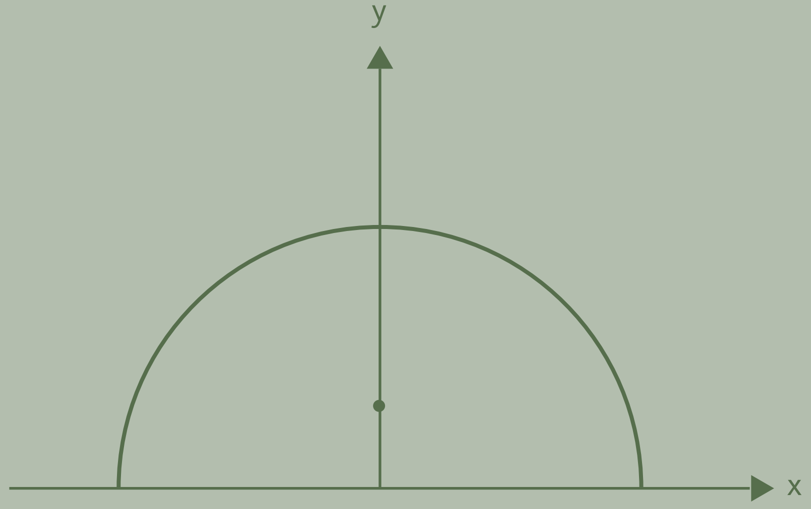
Con lo que las coordenadas del centroide son:

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0.20$$



# Problema

**Calcular las coordenadas del centroide de media circunferencia.**




$\bar{x} = 0$ Por estar en el eje de simetría y; $\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$ y la dA =udy

Calculemos el numerador de la expresión $\int y dA$
De acuerdo con el croquis se tiene el siguiente triángulo rectángulo.

Por Pitágoras en su Teorema se tiene: $u^2 = r^2 - y^2$

Por lo que $u = \sqrt{r^2 - y^2}$

Ahora, considerando las dos mitades del semicírculo se tiene:

$$2\int_0^r y dA = 2\int_0^r y\left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)dy$$

Resolviendo la integral por el procedimiento de cambio de variable queda:

$$u = \sqrt{r^2 - y^2} \therefore u^2 = r^2 - y^2$$

$2udu = -2ydy$ Por lo que $udu = -ydy$

Entonces:

$$2\int_0^r ydA = 2\int_0^r u(udu) = 2\int_0^r u^2 du = 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_0^r = 2\left(\frac{r^3}{3}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

Como el área de la mitad de la circunferencia es $A = \frac{\pi r^2}{2}$

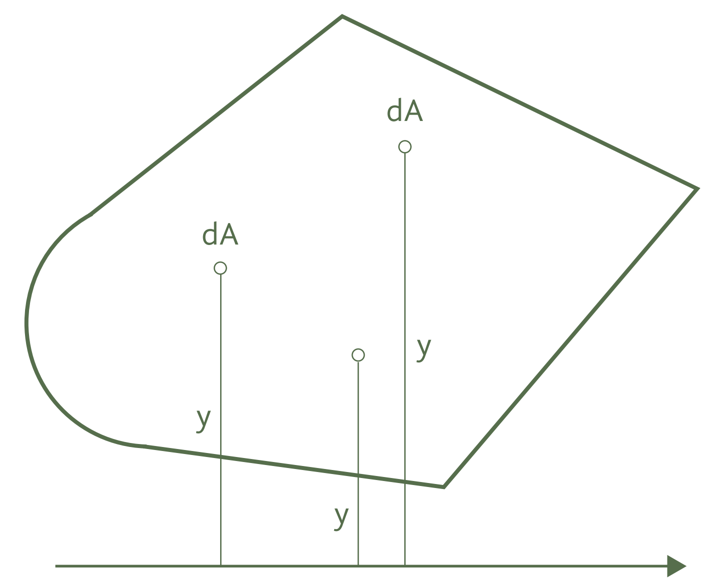
Finalmente la expresión $\bar{y} = \frac{\int ydA}{A}$ queda:

$$\bar{y} = \frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r^3}{3\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Y con este valor determinamos que las coordenadas del centroide de media circunferencia se encuentran en el punto:

$$\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$$

# Momentos de inercia




Los momentos de inercia tienen una aplicación directa cuando se analizan las estructuras y todo arquitecto debe conocer esta propiedad de las secciones para aplicarla en sus diseños.

Recordemos un poco los fundamentos matemáticos de este concepto:

Se llama momento de inercia de una figura plana con relación a un eje, a la suma de los productos de las áreas elementales en que se puede dividir la figura multiplicadas por los cuadrados de sus distancias al eje en cuestión.

$$dI = y^2 dA$$

$$I_X = y_1^2 dA_1 + y_2^2 dA_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Ix = \Sigma y^2 dA = \int y^2 dA$$

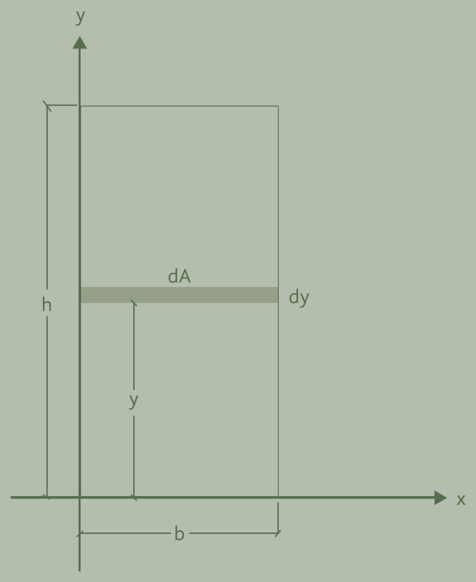
# Problema

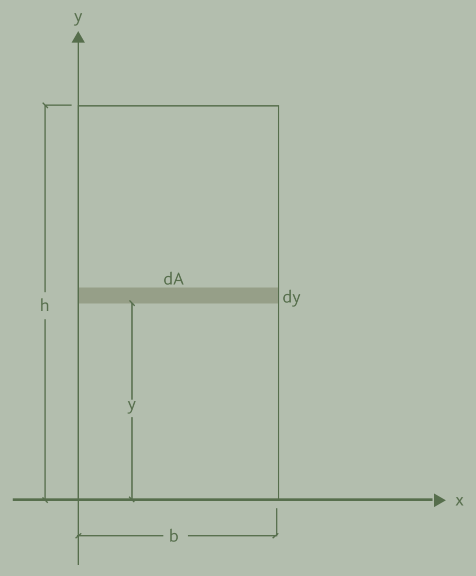
**Desde el punto de vista estricto del cálculo integral, deduciremos la ecuación que identifica al momento de inercia a partir de su definición matemática.**

$$dA = bdy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h bdy = b\int_0^h y^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \boxed{\frac{bh^3}{3}}$$

Esta expresión identifica al momento de inercia de una sección rectangular con respecto a un eje X´X que pasa por su base.




Ahora bien, la expresión que más utilizamos los arquitectos en el cálculo estructural es la que implica el momento de inercia centroidal, es decir, con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de la figura plana o de la sección de un elemento estructural.

# Problema

**Determinar el momento de inercia de una sección rectangular con respecto a un eje horizontal que pasa por su centroide.**

$dA = bdy$ Que es el área infinitamente pequeña.

Ahora, en este caso, como el eje X´X es centroidal, la altura que recorrerá la fajita dA, es la mitad de la altura de la sección rectangular con lo que los límites de la integral cambiarán de la siguiente forma:

$$I_x = \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dA = \int_0^{\frac{h}{2}} bdy = b\int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}} = b\left[\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}\right] = b\left[\frac{\frac{h^3}{8}}{3}\right] = \boxed{\frac{bh^3}{24}}$$

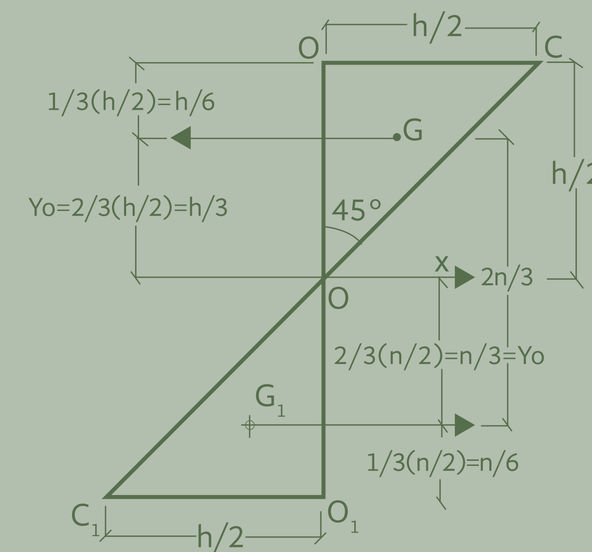
Pero como solamente se consideró la mitad superior de la sección con respecto al eje X´X centroidal, tendremos que multiplicar por 2 la expresión, con lo que finalmente queda que el momento de inercia de una sección rectangular con respecto a un eje centroidal es:

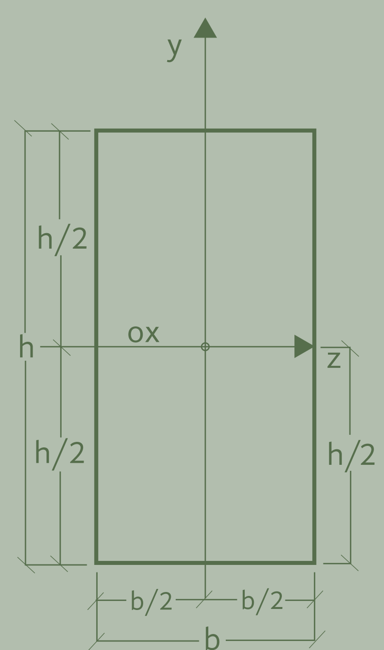
$$2\left(\frac{bh^3}{24}\right) = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$$

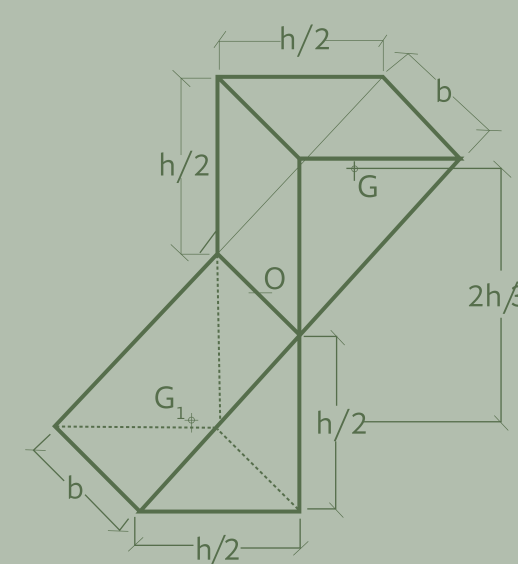
Ahora bien, podemos también llegar a deducir la expresión del momento de inercia, desde otro punto vista, el de su interpretación geométrica.

El momento de inercia de un área plana con respecto a un eje cualquiera colocado en su mismo plano, puede representarse como un producto; a saber, el del volumen *V* de un sólido prismático por la distancia $y_o$ de su centro de gravedad *G*, al plano perpendicular al que contiene el área *A* y pasa por el eje cualquiera *OZ*, con respecto al cual se generará el prisma y se desea obtener el momento de inercia correspondiente.

Aplicando el concepto anterior a un área rectangular de sección bh cuyo centroide coincide con el origen de coordenadas *O* y el área del rectángulo queda en el plano *YOZ*, determinaremos el momento de inercia del área bh con respecto a su eje centroidal *OZ*, que está en el mismo plano *YOZ*, de la sección.



Haciendo la construcción del sólido, se obtienen dos prismas triangulares anti simétricos con respecto al plano *YOZ*, cuyas bases son respectivamente:

Una, el área $\frac{bh}{2}$ y la otra el *OC*, contenida en el plano *OC*, inclinado a 45º respecto a los planos *YOZ* y *XOZ*.

La altura de cada uno de los prismas es de acuerdo con su construcción igual a $\frac{h}{2}$ y el volumen *V* de cada uno de ellos será:

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)b\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{8}\left(cm^3\right)$$

La distancia desde el centro de gravedad de cada uno de ellos al plano *XOZ*, centroidal del área rectangular *bh*, es:

$$y_o = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{3}(cm)$$

Por lo tanto, los momentos estáticos de cada uno de los prismas con respecto al plano XOZ, es:

$$Vy_o = \frac{bh^2}{8}\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{bh^3}{24}\left(cm^4\right)$$

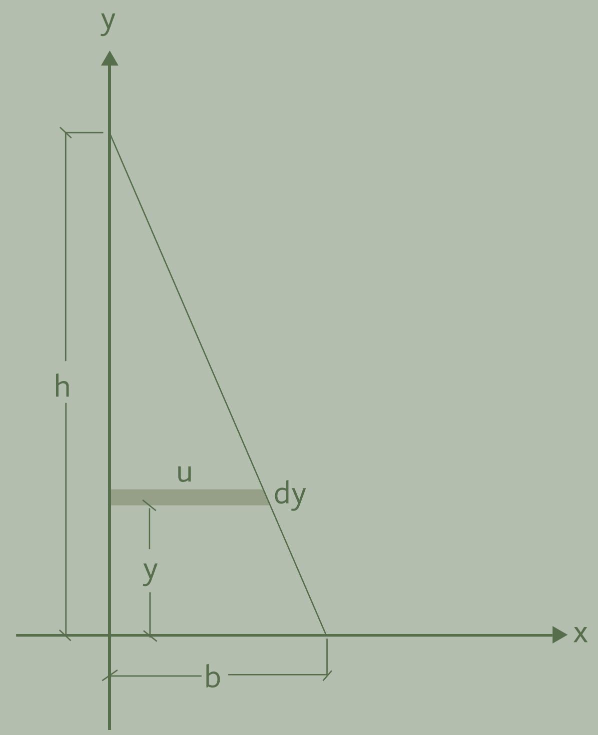
Ahora, por lo tanto, para ambos prismas se tendrá:

$$2Vy_o = V\left(2y_o\right) = 2\frac{bh^2}{8}\left(\frac{h}{3}\right) = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$$

Que como se ve, es el momento de inercia I, con respecto al eje *OZ*.

# Problema

**Calcular el momento de inercia de un triángulo con respecto a un eje horizontal que pasa por su base.**




$$I_x = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h y^2 u dy = \int_0^h y^2 \left(\frac{b(h-y)}{h}\right) = \int_0^h y^2 \left(\frac{bh-by}{h}\right) = \quad \frac{u}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$u = \frac{b(h-y)}{h}$$

$$I_x = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right)dy = \frac{b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b}{h}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{b}{h}\left(\frac{4h^4 - 3h^4}{12}\right) =$$

$$I_x = \frac{b}{h}\left(\frac{h^4}{12}\right) = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$$

Que como vemos en este caso es igual al momento de inercia de un rectángulo con respecto al eje horizontal que pasa por su centro de gravedad.

# Capítulo 7

## DISEÑO DE ESTRUCTURAS



Índice

Como aplicaciones de matemáticas y para entender el diseño arquitectónico y el comportamiento de las estructuras que le darán forma, encontramos muchos y muy variados casos. En mi experiencia profesional he tenido que hacer un gran número de cálculos para determinar la geometría y el armado de diversos elementos estructurales.

Como este libro trata de las matemáticas que un arquitecto debe conocer para su práctica profesional y no de un libro de cálculo de estructuras, me limitaré a desarrollar algunos problemas que sirvan de ejemplo.

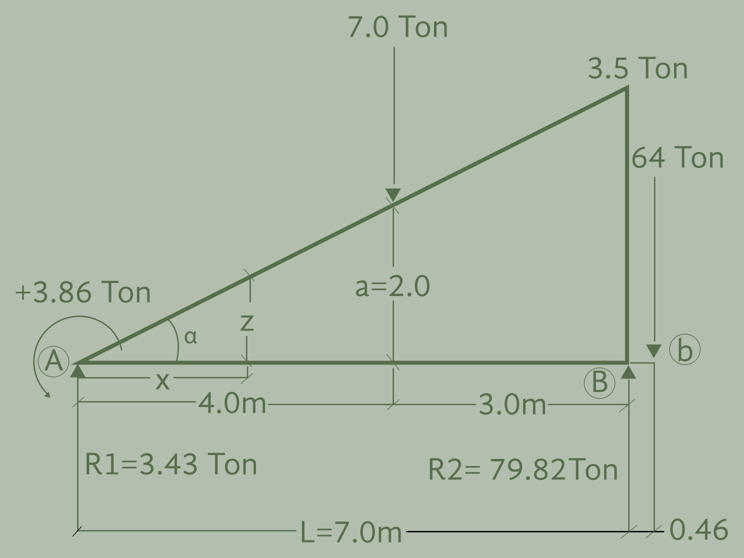
Un personaje muy respetado y muy querido de la entonces Escuela Nacional de Arquitectura, el arq. Eugenio Peschard Delgado, para evaluar el aprendizaje de sus alumnos de Resistencia de Materiales acostumbraba poner algunos problemas, creo yo, algo complejos. Sin embargo, eran ejercicios que implicaban un conocimiento de ciertos procedimientos de cálculo en los que intervienen las matemáticas y la aplicación de álgebra y trigonometría.

A continuación planteo un problema del tipo de los que ponía don Eugenio.

# Problema

**Dada una viga simplemente apoyada, con una carga triangular, una carga concentrada en un punto intermedio, un momento en un extremo y un volado con carga concentrada en el otro, se requiere encontrar las reacciones, la gráfica de fuerzas cortantes, los momentos flexionantes en los puntos de los apoyos, bajo la carga concentrada y el momento máximo para el cortante igual a cero, el cálculo de los puntos de inflexión, la gráfica de momentos flexionantes, los ángulos de giro en los apoyos y las flechas bajo la carga concentrada y en el extremo del volado.**

**Analicemos el croquis.**




Definamos la altura del triángulo bajo la carga concentrada por la relación de triángulos semejantes:

$$\frac{a}{3.5} = \frac{4}{7}\text{, de donde } a = \frac{3.5(4)}{7} = \boxed{2.0m}$$

Momentos con respecto al punto A:

$$7R_2 + 3.86 - \frac{3.5(7)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(7) - 7(4) - 64(7.46) = 0$$

$$7R_2 + 3.86 - 57.17 - 28 - 477.44 = 0$$

$$R_2 = \frac{-3.86 + 57.17 + 28 + 477.44}{7} = \frac{558.75}{7} = \boxed{79.82ton}$$

Momentos con respecto al punto B:

$$-7R_1 + 3.86 + \frac{3.5(7)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(7) + 7(3) - 64(0.46) = 0$$

$$28.58 + 21.00 - 29.44 = 0$$

$$R_1 = \frac{+3.86 + 28.58 + 21.00 - 29.44}{7} = \frac{24}{7} = \boxed{3.43ton}$$

Ahora, sumamos las reacciones: $R_1 + R_2 = 79.82 + 3.43 = \boxed{83.25ton}$

Para los efectos de estar seguros, hagamos la suma de las cargas:

$$\Sigma c\arg as = \frac{3.5(7)}{2} + 7.0 + 64 = 12.50 + 7.0 + 64.00 = \boxed{83.25ton}$$

Análisis de las fuerzas cortantes.

$$VA: +3.43 - \frac{3.86}{7.0} = +3.43 - 0.54 = 2.89$$

$$Vp_1 = +2.89 - \frac{2(4)}{2} = +2.89 - 4.0 = -1.11$$

$$Vp_2 = -1.11 - 7.0 = -8.11$$

$$VB = -8.11 - 2.0(3.0) - \frac{1.5(3.0)}{2} + \frac{3.86}{7} = -8.11 - 6.0 - 2.25 + 0.54 =$$

$VB = -15.81 - 64.00 = -79.82ton$ Que es igual a $R_2$, luego vamos bien.

Definamos ahora la altura Z. (ver croquis)

$\tan\alpha = \frac{3.5}{7} = 0.5$, por lo que: $\alpha = ang\tan 0.5$

$$z = x\tan\alpha = 0.5x = \frac{x}{2}$$

**Análisis de fuerzas cortantes:**

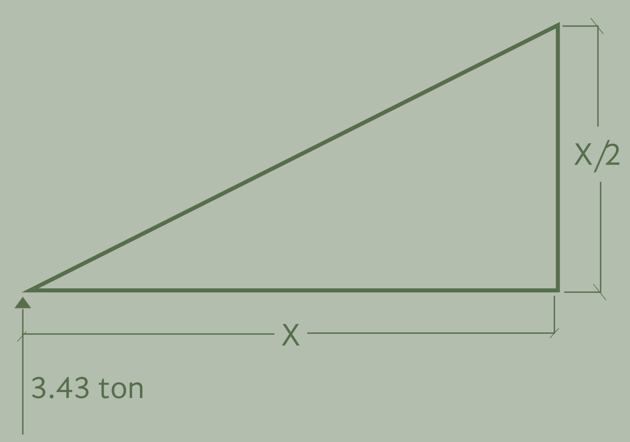
Analicemos en primer lugar en donde el cortante es igual a cero:

$3.43 - \frac{1}{2}(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, por lo tanto: $3.43 - \frac{x^2}{4} = 0$

$$x^2 = 4(3.43) = 13.72$$

$$x = \sqrt{13.72} = 3.704$$

Por lo tanto, el momento máximo estará en 3.704




$$V_A = +3.43$$

$$V_{1.0} = +3.43 - \frac{0.5(1.0)}{2} = +3.43 - 0.25 = +3.18$$

$$V_{2.0} = +3.43 - \frac{1.0(2)}{2} = +3.43 - 1.0 = +2.43$$

$$V_{3.0} = +3.43 - \frac{1.5(3)}{2} = +3.43 - 2.25 = +1.18$$

$$V_{3.704} = +3.43 - \frac{1.852(3.704)}{2} = +3.43 - 3.43 = 0$$

$$V_{4.0} = +3.43 - \frac{2.0(4.0)}{2} = +3.43 - 4.0 = -0.57$$

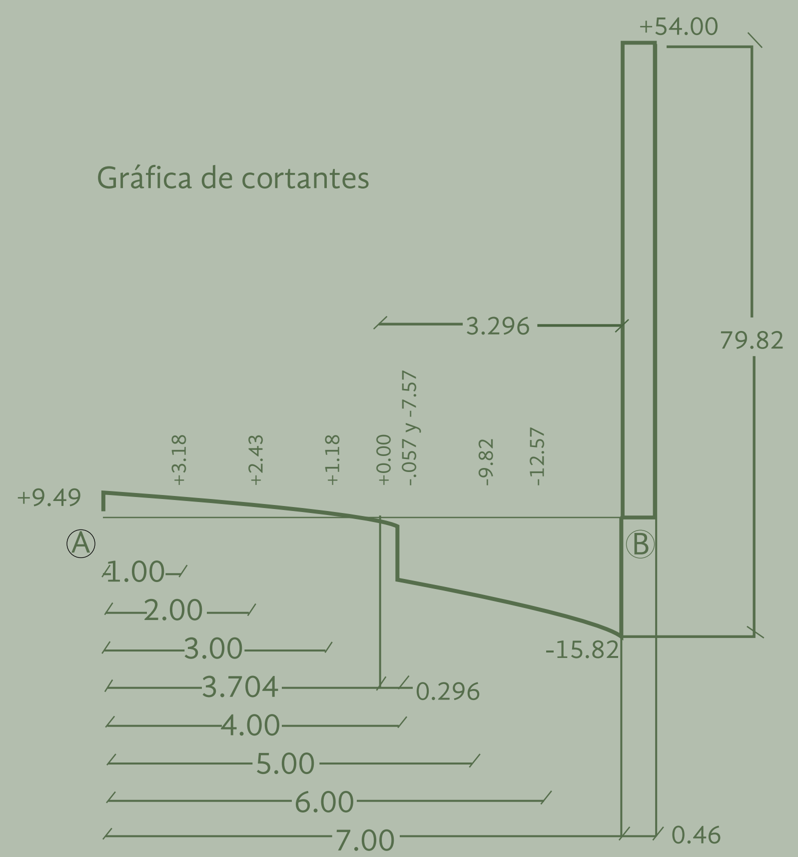
$$V_{4.0} = -0.57 - 7.0 = -7.57$$

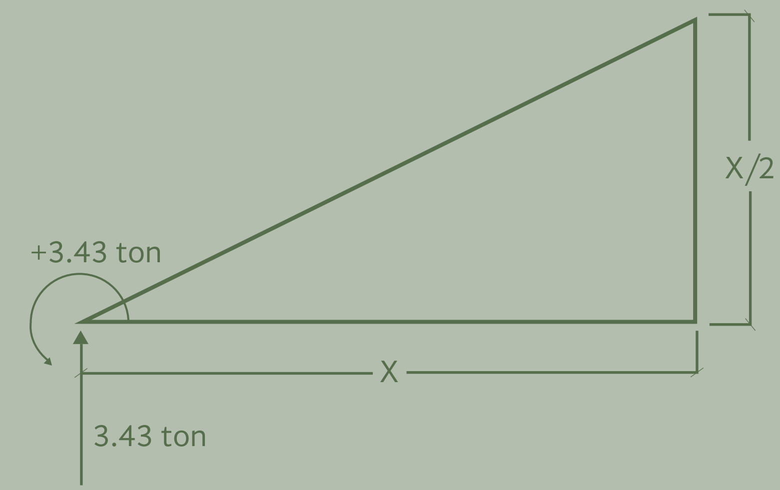
$$V_{5.0} = +3.43 - \frac{2.5(5)}{2} - 7.0 = +3.43 - 6.25 - 7.0 = -9.82$$

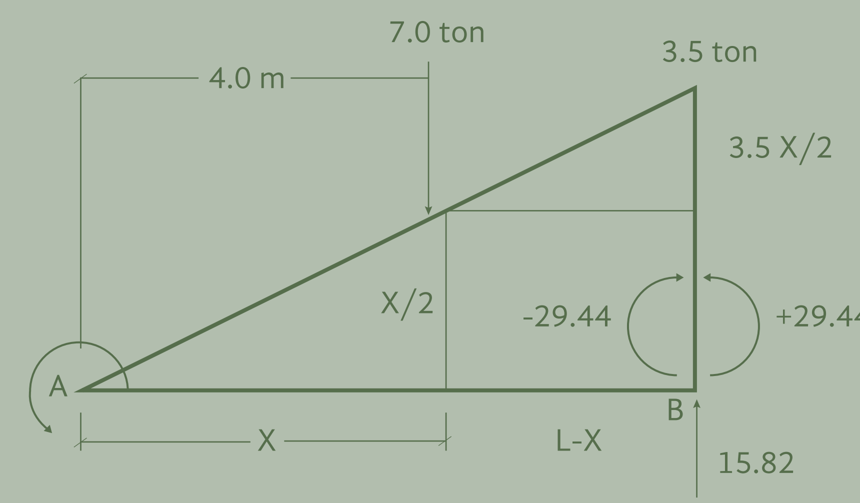
$$V_{6.0} = +3.43 - \frac{3.0(6.0)}{2} - 7.0 = +3.43 - 9.0 - 7.0 = -12.57$$

$$V_{7.0} = +3.43 - \frac{3.5(7.0)}{2} - 7.0 = +3.43 - 12.25 - 7.0 = -15.82$$

Construyamos la gráfica de fuerzas cortantes






**Tomemos momentos:**

Momento máximo en x = 3.704m.

$$M_{3.704} = -3.43(3.704) + \frac{1.852(3.704)}{2}\left(\frac{3.704}{3}\right) + 3.86 =$$

$$= -12.705 + 3.43(1.235) + 3.86 = -12.705 + 4.236 + 3.86 =$$

$$= -4.609 \boxed{\approx -4.61tm}$$

$$M_A = +3.86$$

$$M_{1.0} = -3.43(1.0) + \frac{0.5(1)}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + 3.86 = -3.43 + 0.083 + 3.86 = +0.513$$

$$M_{2.0} = -3.42(2.0) + \frac{1.0(2)}{2}\left(\frac{2}{3}\right) + 3.86 = -6.86 + 0.667 + 3.86 = -2.333$$

$$M_{3.0} = -3.43(3.0) + \frac{1.5(3.0)}{2}\left(\frac{3}{3}\right) + 3.86 = -10.29 + 2.25 + 3.86 = -4.18$$

$$-12.705 + 4.235 + 3.86 = -4.61(OK)$$

$$M_{3.704} = -3.43(3.704) + \frac{1.852(3.704)}{2}\left(\frac{3.704}{3}\right) + 3.86 =$$

$$M_{Bb} = +64.0ton(0.46m) = +29.44$$

$$M_{BA} = -29.44tm$$

$$M_{(7-1)} = +15.82(1.0) - 3.0(1.0)(0.5) - \frac{0.5(1.0)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(1.0) - 29.44 =$$

$$= +15.82 - 1.50 - 0.167 - 29.44 = -15.287$$

$$M_{(7-2)} = +15.82(2.0) - 2.5(2.0)(1.0) - \frac{1.0(2.0)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2.0) - 29.44 =$$

$$= 31.64 - 5.00 - 1.333 - 29.44 = -4.133$$

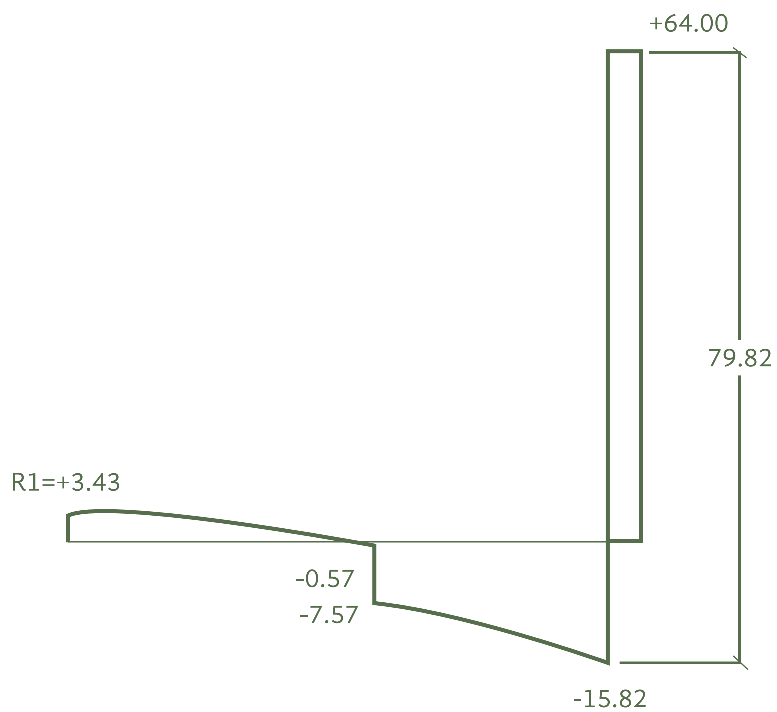
$$M_{(7-3)} = +15.82(3.0) - 2.0(3.0)(1.5) - \frac{1.5(3.0)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3.0) - 29.44 =$$

$$= +47.46 - 9.0 - 4.5 - 29.44 = +4.52$$

$$M_{(3.296)} = +15.82(3.296) - 1.852(3.296)(1.648) - \frac{1.648(3.296)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3.296) - 7.0(0.296) - 29.44 =$$

$$= +52.143 - 10.060 - 5.968 - 2.072 - 29.44 = +4.61 \text{ (OK)}$$

# Gráfica de cortantes




$$M_{AB} = +3.86$$

$$M_{BA} = -64(0.46) = -29.44$$

$$M_{BA1m} = -3.43(1.0) + \frac{zx}{2}\left(\frac{x}{3}\right) + 3.86 = +0.51$$

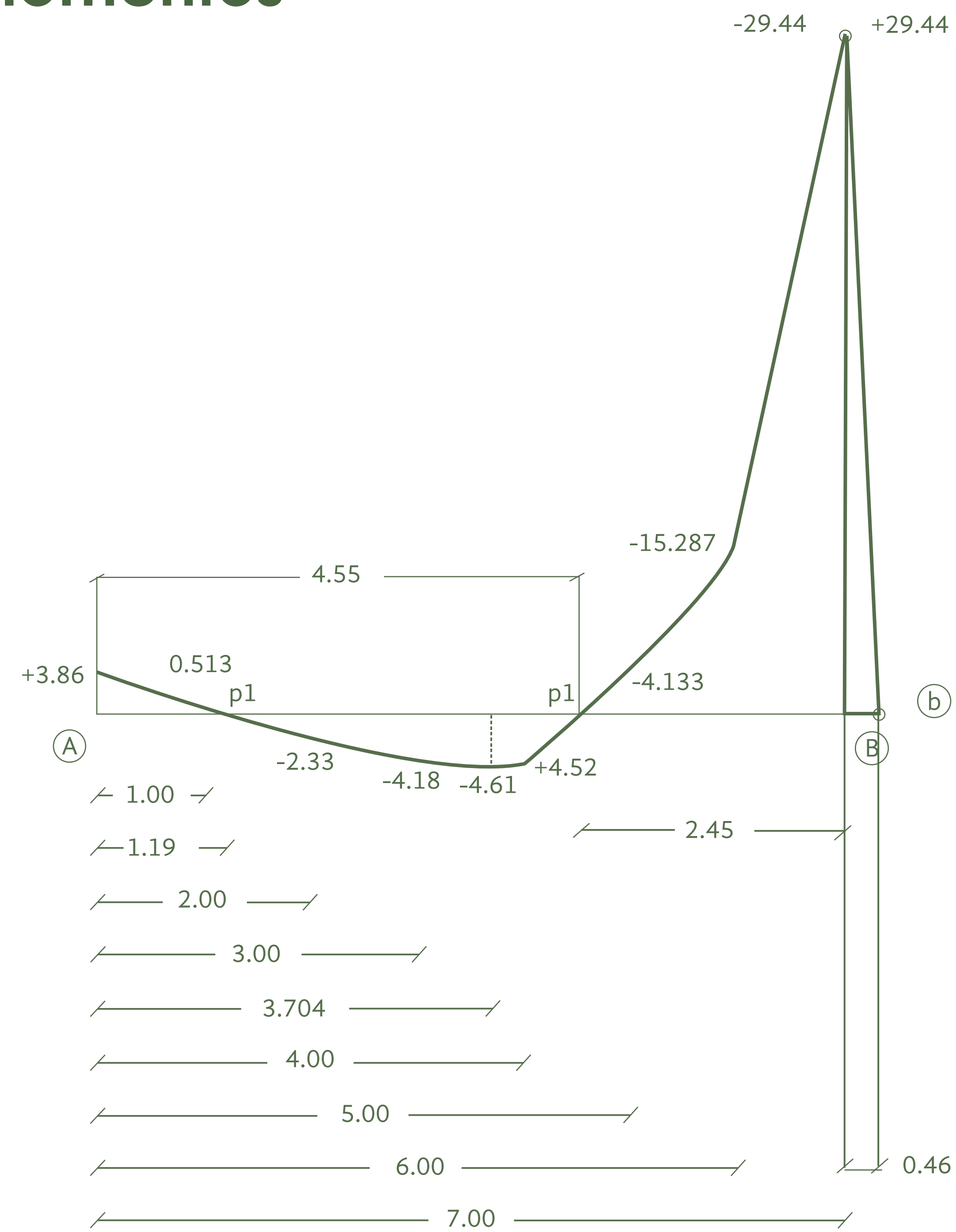
$$M_{B2m} = -3.43(2.0) + \frac{1(2)}{2}\left(\frac{2}{3}\right) + 3.86 = -2.33$$

$$M_{B3m} = -3.43(3.0) + \frac{1.5(3)}{2}\left(\frac{3}{3}\right) + 3.86 = -4.18$$

$$M_{B4m} = -3.43(4.0) + \frac{2.0(4)}{2}\left(\frac{4}{3}\right) + 3.86 = -4.53$$

$$M_{B7m} = -3.43(7) + \frac{3.5(7)}{2}\left(\frac{7}{3}\right) + 7(3.0) + 3.86 = +29.43$$

# Gráfica de momentos



# Puntos de inflexión

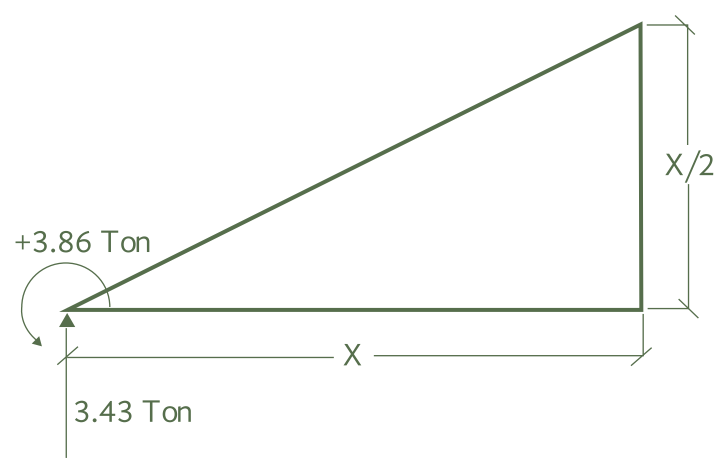
Primer punto:

$$-3.43x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)(x)\left(\frac{x}{3}\right) + 3.86 = 0$$

$$-3.43x + \frac{x^3}{12} + 3.86 = 0$$

$$-41.16x + x^3 + 46.32 = 0$$

$$x^3 - 41.16x + 46.32 = 0$$




Para los efectos de una rápida solución, se puede intentar medir la posición del punto de inflexión y para este caso, encuentro una distancia de 1.164 m que ahora sustituiremos en la ecuación de tercer grado.

$$(1.164)^3 - 41.16(1.164) + 46.32 =$$

$$1.5771 - 47.9102 + 46.32 = 0.013$$

Casi cero, por lo que podríamos aceptar este valor de $\boxed{x_{pI} = 1.164}$ para el primer punto de inflexión.

Para el segundo punto de inflexión tendremos:

$$15.82(7-x)-\frac{x}{2}(7-x)\left(\frac{7-x}{2}\right)-\frac{\left(3.5-\frac{x}{2}\right)(7-x)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(7-x)-29.44=0$$

$$15.82(7-x)-\frac{x(7-x)^2}{4}-\frac{\left(\frac{7-x}{2}\right)(7-x)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(7-x)-29.44=0$$

$$15.82(7-x)-\frac{x(7-x)^2}{4}-\frac{(7-x)^3}{6}-29.44=0$$

$$63.28(7-x)-x(7-x)^2-\frac{4(7-x)^3}{6}-117.76=0$$

$$379.68(7-x)-6x(7-x)^2-4(7-x)^3-706.56=0$$

$$379.68(7-x)-6x\left(49-14x+x^2\right)-4\left[7^3-3(7)^2x+3(7)x^2-x^3\right]-706.56=0$$

$$579.20-85.68x+0x^2-2x^3=0$$

$$2x^3+85.68-579.20=0$$

Análogamente, como en el paso anterior, tomaremos de la gráfica un valor a escala para tratar de comprobar la solución a esta ecuación de tercer grado y tenemos una propuesta: x = 4.556.

Sustituyendo:

$2(4.556)^3+85.68(4.556)-579.20=-0.0029$ , valor que podemos aceptar.

# Problema

**Para valorar nuestro diseño arquitectónico, los arquitectos, a mi juicio, debemos comprender cómo se comportará la estructura proyectada ante fenómenos de tipo accidental como un sismo**

A continuación me permito exponer de una manera sencilla como entender dicho comportamiento a partir de la interpretación del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal vigente en esta fecha (2017).

En primer lugar explicaré de dónde viene el coeficiente sísmico que se asigna a los diferentes tipos de edificaciones según el tipo de suelo donde se ubican y según la clasificación de las estructuras que hace el propio reglamento.

Entenderemos por sismo un movimiento oscilatorio que tiene periodo, velocidad y aceleración; y que la cimentación, unida al terreno participa en los movimientos oscilantes del mismo.

De la fórmula de I. Newton: V=ma, en la que,

**V=** Fuerza en el sentido en que actúa la aceleración
(Ésta fuerza es en la base de la cimentación)

**M=** masa

**A =** aceleración

Vamos a desarrollar esta expresión:

$$V = ma$$

Despejando a la M, queda:

$$m = \frac{V}{a}$$

Pero también recordemos la definición de peso (W) $W = mg$ o bien $m = \frac{W}{g}$

Peso entre la aceleración de la gravedad.

Ahora, igualando las expresiones $m = \frac{V}{a} = \frac{W}{g}$ , ahora, despejando V, queda:

$V = \frac{W}{g} a$ , por lo que $Vg = Wa$

Entonces $\frac{V}{W} = \frac{a}{g} = C$ , finalmente:

$V = \frac{a}{g} W$ , por lo que se concluye que $V = CW$

Lo que en la reglamentación vigente se considera como: el cortante sísmico es igual al peso de la edificación (carga viva + carga muerta) multiplicada por el coeficiente sísmico correspondiente.

# Problema

**Hagamos a continuación un ejercicio de aplicación para determinar el cortante sísmico de un edificio cualquiera.**

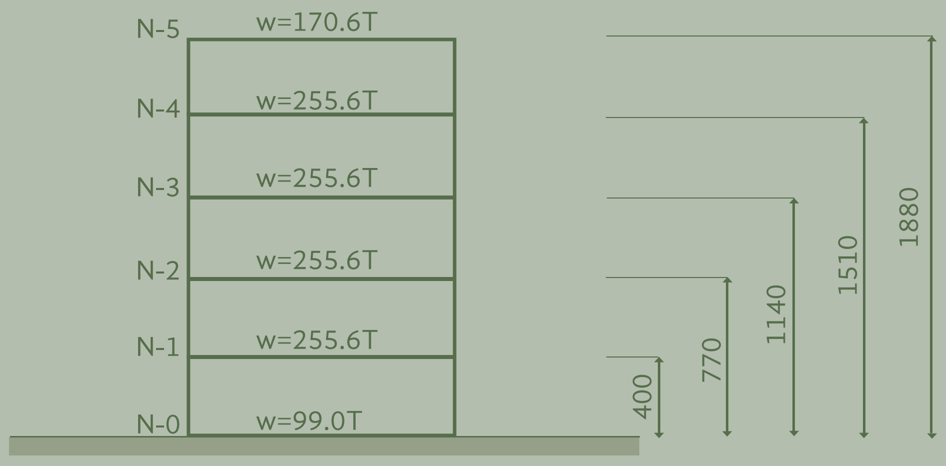
Supóngase que el edificio pertenece al Grupo B y que se ubica en la Zona II (TRANSICIÓN) Véase Normas Técnicas Complementarias para Diseño Sísmico, Criterios Generales de Diseño, Art. 1.5

Según el Reglamento de Construcciones, a este tipo de edificación y según su lugar de ubicación le corresponde un C.S. =0.32, pero según la misma Normatividad, le corresponde un Factor de Ductilidad Q=2, Véase Art. 5, Factor de Comportamiento Sísmico, Art. 5.3

Con la aplicación de los artículos de reglamento antes mencionados, se tendrá finalmente un C.S. = 0.16, al dividir $\frac{C.S.}{Q} = \frac{0.32}{2} = 0.16$

Veamos un croquis de la estructura con algunos datos como: peso de cada nivel y altura de cada uno de ellos con respecto al nivel del suelo.

Una vez hecha la bajada de cargas, tomando en cuenta las vivas y las muertas, se ubican dichos pesos en el croquis en cada nivel, así como las alturas correspondientes, según se aprecia en croquis siguiente:



V acumulada = Fuerza Sísmica = $C.S.\left(\sum Wn\right) = 0.16\left(1,292^{ton}\right)$ =206.72ton, que es el cortante horizontal que debe resistir la estructura.

A continuación, se generará una tabla en al concentraremos una serie de datos, tales como el nivel de que se trate, su peso en toneladas, su altura hasta la base, el producto de peso del nivel por su altura y, en las tres últimas columnas, se calcularán el CSn, la fuerza cortante del nivel y el cortante acumulado por nivel, estos valores se calculan con las siguientes expresiones:

$$C = \frac{C.S.(Hn)\left(\sum Wn\right)}{\sum(WnHn)} = \frac{C.S.\left(\sum Wn\right)}{\sum(WnHn)} Hn =$$

$$Fn = \frac{WnHn(Fs)}{\sum(WnHn)} = \frac{Fs}{\sum(WnHn)}(WnHn) =$$

Como ejemplo calcularemos los valores correspondientes y los colocaremos en la tabla:

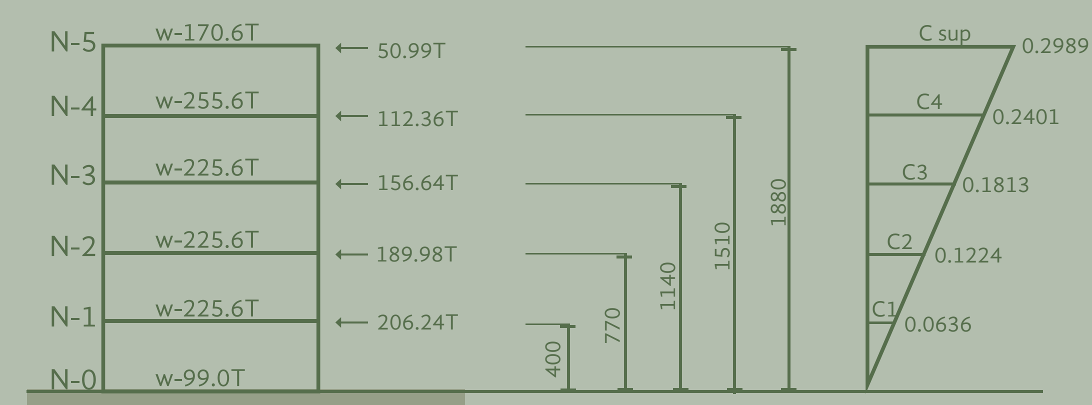
$$C = \frac{C.S.\left(\sum Wn\right)}{\sum(WnHn)} Hn = \frac{0.16(1,292)}{12,971.20}(Hn) = 0.0159(18.80) = 0.2989$$

$$Fn = \frac{Fs}{\sum(WnHn)} WnHn = \frac{206.72}{12,971.20} WnHn = 0.0159(12,971.20) = 50.9958^{ton}$$

Construiremos la tabla:

| **Nivel** | **Wn** | **Hn** | **WnHn** | **C** | **F** | **V** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 170.6T | 18.80 | 3,207.28 | 0.2989 | 50.9958 | 50.9958T |
| 4 | 255.6T | 15.10 | 3,859.56 | 0.2401 | 61.3670 | 112.3628T |
| 3 | 255.6T | 11.40 | 2,913.84 | 0.1813 | 46.3301 | 158.6929T |
| 2 | 255.6T | 7.70 | 1,968.12 | 0.1214 | 31.2931 | 189.9860T |
| 1 | 255.6T | 4.00 | 1,022.40 | 0.0636 | 16.2562 | 206.2422T |
| 0 | 99.0T | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| ∑ | 1,292.0T | -------- | 12,971.20 | -------- | -------- | |

Para ilustrar lo obtenido en la tabla, revisemos el siguiente croquis:



Ahora revisemos el momento sísmico aplicado en la base de la estructura o momento de volteo general:

Para determinar la altura del punto de apoyo de la fuerza cortante, se utilizará la siguiente expresión matemática:

$$Hv = \frac{\sum FnHn}{V} =$$

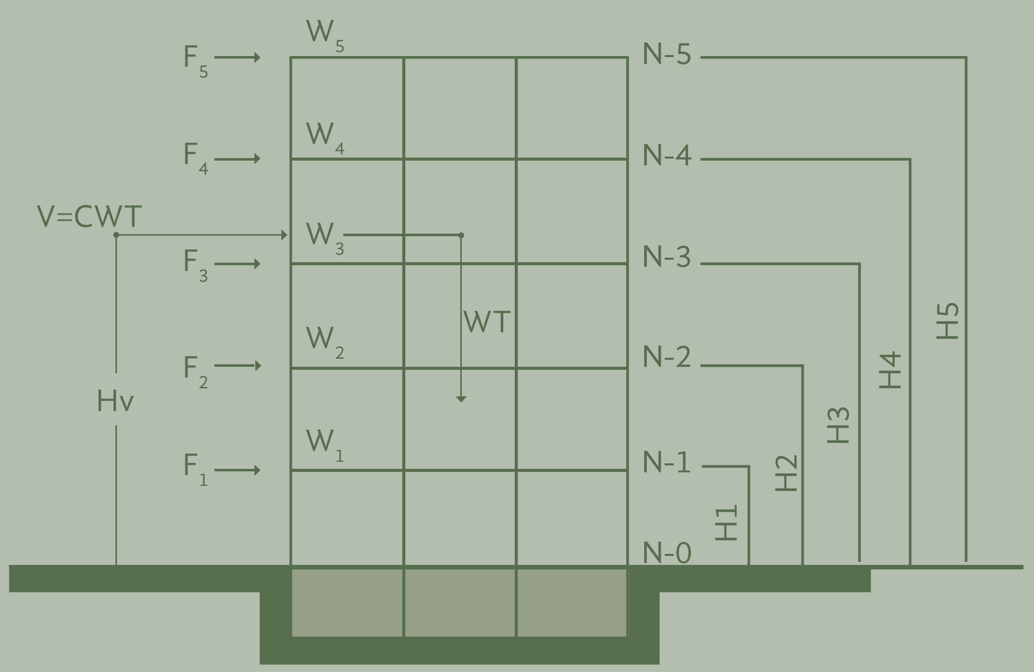
Y sabiendo que V en este caso es igual a la siguiente expresión:

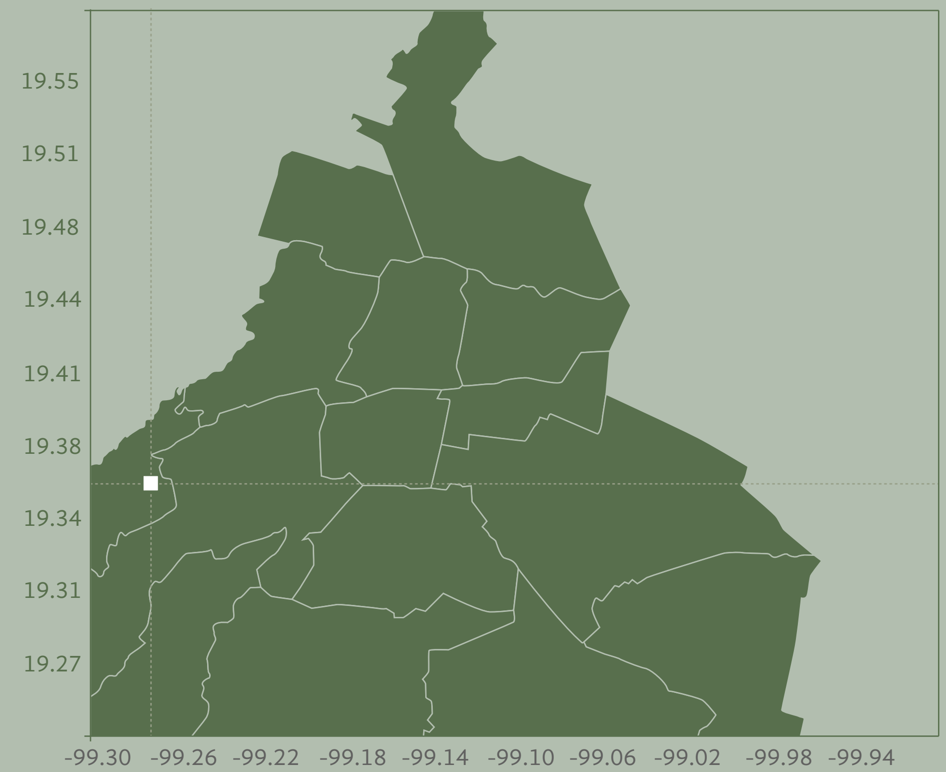
$$V = C.S.(Wt) =$$

$$V = C.S.(Wt) = 0.16(1,292.00) = 206.72^{ton}$$

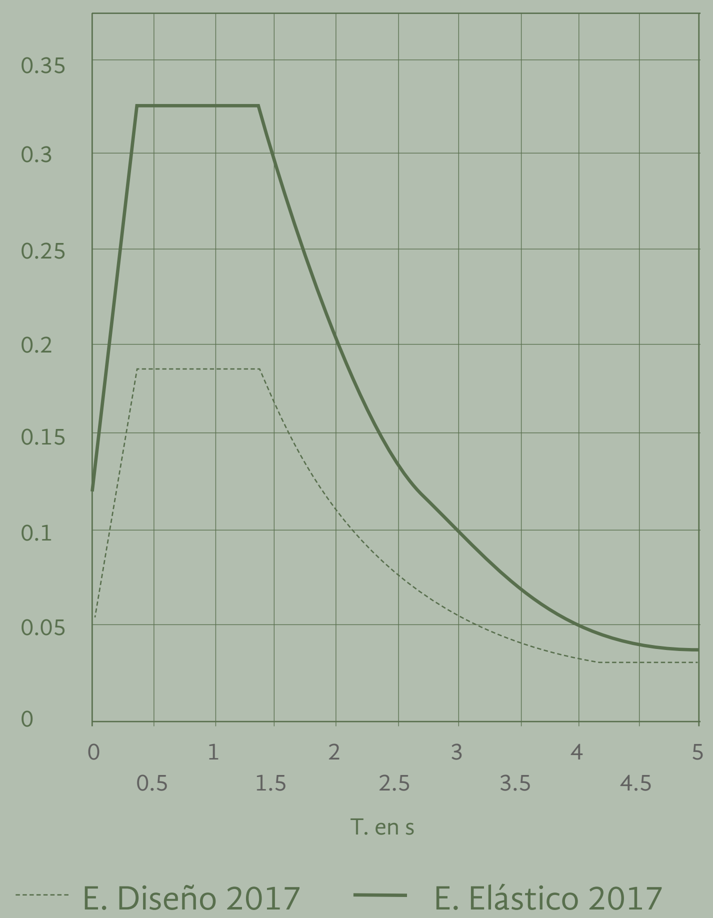
$$Hv = \frac{\sum FnHn}{V} = \frac{2,719.50}{206.72} = 13.16^{mt}$$

Concentrando estos datos en el siguiente croquis esquemático tenderemos:






Coordenada 19.532305, 99.290441 Lomas (Ts <=0.5s) (Ts <=0.5s) Transición y Lago




E. Diseño 2017

| T (s) | a |
|---|---|
| 0.100 | 0.090 |
| 0.200 | 0.127 |
| 0.300 | 0.166 |
| 0.350 | 0.186 |
| 0.400 | 0.186 |
| 0.500 | 0.186 |
| 0.600 | 0.186 |
| 0.700 | 0.186 |
| 0.800 | 0.186 |
| 0.900 | 0.186 |
| 1.000 | 0.186 |
| 1.100 | 0.186 |
| 1.200 | 0.186 |
| 1.300 | 0.186 |
| 1.383 | 0.186 |
| 1.400 | 0.184 |
| 1.500 | 0.170 |
| 1.600 | 0.157 |

| Espectro 2016 | |
|---|---|
| Factor de importancia (Grupo) | B |
| Factor de irregularidad | 1.0 |
| F. comportamiento sísmico (Q) | 1.0 |
| F. de hiperestaticidad (k1) | 1.0 |

| Propiedad | Valor |
|---|---|
| Latitud | 19.357699 |
| Longitud | -99.270068 |
| Ts | 0.490 |
| a0 | 0.119 |
| c | 0.326 ← |
| Ta | 0.350 |
| Tb | 1.383 |
| k | 1.500 |
| Amax | 0.186 |

# Problema

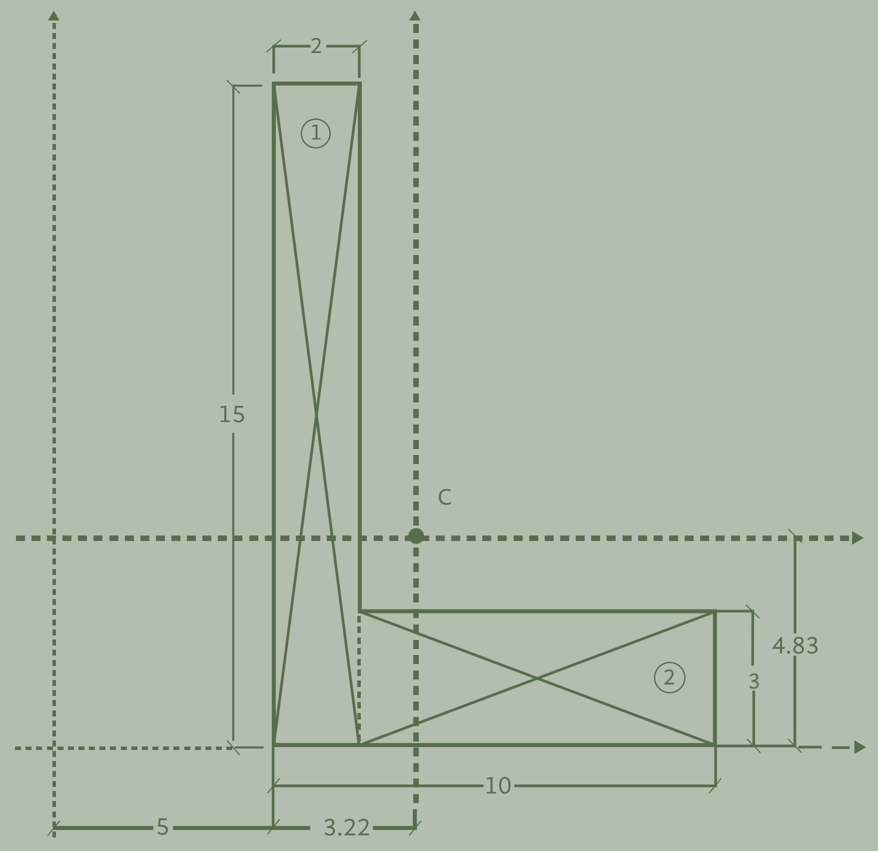
**¿Cómo entender la necesidad de diseñar un cierto cuerpo arquitectónico con una separación constructiva?**

Cuando se hace un diseño arquitectónico de un edificio con una planta no regular, se tiene que revisar su centro de gravedad para evitar una torsión que pueda significar lesiones y hasta en propio colapso de la construcción; sea por ejemplo un hotel, el cual se proyecta en forma de escuadra para acoger el espacio abierto en el que se ubicará la alberca, el jardín, el bar, etcétera.

Lo que se pretende aclarar es el hecho de que en una figura como ésta, el centro de gravedad o centroide se encuentra fuera de propia figura, lo que provoca cierta excentricidad y, por lo tanto, bajo la acción de fuerzas accidentales, la torsión del edificio.

Con el siguiente problema, ilustraré el caso:

Sea la figura en L que ilustra el caso



Para determinar el centroide, se requiere dividir a la figura en formas regulares, en este caso, los rectángulos I y 2, y se colocará a la figura haciendo coincidir a la base y al costado de la misma con los ejes de coordenadas. Sabiendo que el centroide de un rectángulo se encuentra en el cruce de sus diagonales, y a partir del acomodo del cuerpo, se construirá una tabla en la cual se colocarán las superficies de cada uno y las distancias correspondientes desde sus respectivos centros de gravedad a cada uno de los ejes cartesianos.

Determinemos la abscisa de centroide:

$$\bar{X} = \frac{174}{54} = 3.22$$

Ahora la ordenada:

$$\bar{Y} = \frac{261}{54} = 4.83$$

Por lo tanto, la pareja ordenada siguiente nos muestra la ubicación del Centro de Gravedad de la figura

$$C(3.22, 4.83)$$

Como se ve, el centroide queda efectivamente fuera del área, por lo que, volviendo al caso del hotel, se puede comprender la necesidad de diseñar una junta de construcción que separe a la figura en dos cuerpos que puedan comportarse libremente ante la acción de un sismo de algún tipo de hundimiento diferencial.

En mi ejercicio profesional se me han presentado muchas veces algunos problemas relativos al diseño de ciertas estructuras, tales como pórticos articulados, marcos empotrados, vigas continuas, etcétera, casos que me permito ejemplificar a continuación.

$$I = 2$$

$$K = \frac{2}{10} = 0.20$$

$$I = 1$$

$$K = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$\sum(0.20 + 0.167) = 0.366$$

$$\frac{0.20}{0.366} = 0.544$$

$$\frac{0.167}{0.366} = 0.456$$

$$Me = \frac{wl^2}{12} = \frac{2(100)}{12} = 16.67^{TM}$$

# Capítulo 8

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS



Índice

Cuando inicié mis actividades profesionales en otra rama de la carrera, es decir, dentro de la valuación inmobiliaria tuve que aplicar mis conocimientos de matemáticas, pero con otro enfoque, en este caso el de las matemáticas financieras y para ello hubo la necesidad de recordar algunas fórmulas, expresiones y simbología fundamentales, mismas que enlistaré a continuación.

## Simbología fundamental

**G** = Gradiente

**n** = número de periodos

**i** = tasa periódica

**P, PV,** = Valor presente

**F, FV,** = Valor futuro

**A, R, PMT,** = Anualidad, Razón, Pago periódico, Payment, Pago por la misma cantidad

**NPV, VPN,** = Valor Presente Neto

**IRR, TIR,** = Tasa interna de retorno

## Fórmulas fundamentales

**F**= $P(1+i)^n$ Valor Futuro

**P**= $\left[\frac{F}{(1+i)^n}\right]$ Valor Presente

**n**= $\frac{\log\frac{F}{P}}{\log(1+i)}$ Período o número de períodos

**j**= $\sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$ Interés o tasa periódica

# Interés simple

**C** = Capital inicial

**i** = interés

**t** = tiempo

**r** = porcentaje

**A** = Capital final = C + i ó = C (i + rt)

**i** = Crt

Dentro de las matemáticas financieras, se utiliza poco este tipo de interés; sin embargo analizaremos un ejemplo típico de su aplicación.

# Problema

**Hallar la cantidad que deberá pagar una persona al cabo de 2 años por un préstamo de $60,000.00 con un interés simple del 3 por ciento.**

i = Crt = 60,000.00 (0.03)2 = 3,600.00

Entonces deberá pagar el capital inicial más el interés,
C+I = $63,600.00

# Interés compuesto

**C** = Capital inicial

**i** = rédito por período de conversión

**n** = número de períodos de conversión

**A** = Capital final

**A** = $C\,(1+i)^n$ o $F = P\,(1+i)^n$

# Problema

**Si se invierten $ 200,000.00 al 6% anual, acumulándose los intereses cada 6 meses, hallar el capital final A y el interés 1 al cabo de 2 años.**

Manejo de los datos:

**C** = $ 200,000.00

**I** = $\frac{1}{2}(6\%) = 3\% = 0.03$ (se divide entre 2 porque los intereses son dos veces al año)

**n** = 4, porque en dos años hay 4 períodos.

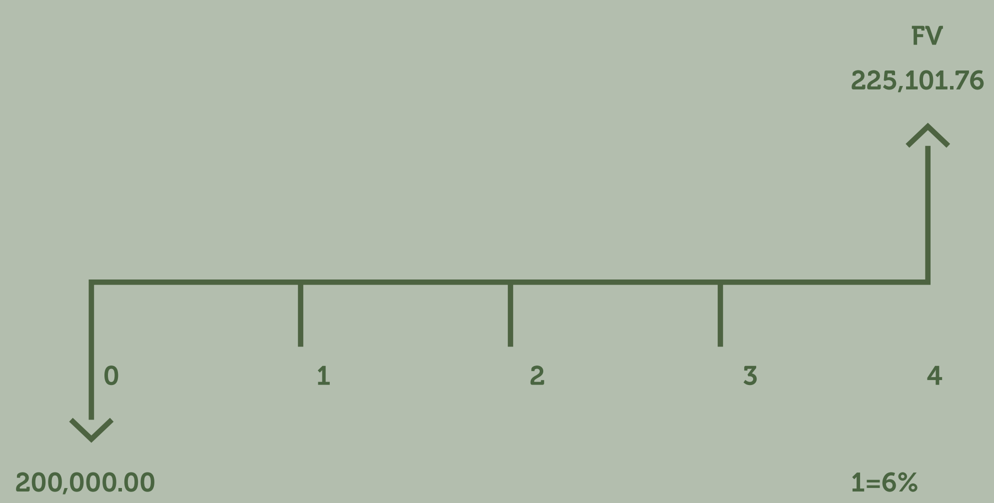
Entonces:

$$A = 200,000.00(1+0.03)^4 = 200,000(1.125508) = \$\ 225,101.76$$

Luego el interés compuesto

$$i = A - C = \$\ 225,101.76 - \$\ 200,000.00 = \$\ 25,101.76$$

## Diagrama financiero



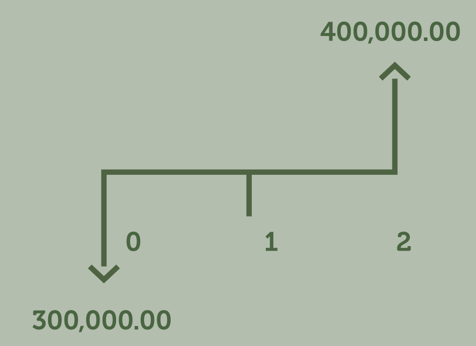

# Problema

**Hallar el rédito al que se deben invertir $ 300,000.00 para tener $ 400,000.00 al cabo de 2 años.**

A = C (1 + rt)

Por lo que

$$r = \frac{A-C}{Ct} = \frac{400,000-300,000}{300,000(2)} = 0.1667 = 16.67\%$$



# Anualidades

Es la sucesión de pagos iguales que se hacen en una forma periódica, el lapso de tiempo entre 2 pagos se llama período de pago y la cantidad pagada en un año se llama renta anual.

### Ejemplo

Hallar el capital que se formará al cabo de 5 años, colocando al final de cada año una anualidad de $ 5,000.00 al 3%.

### Cálculo por pasos

1ª. Anualidad al cabo de 4 años = 5,000.00 $(1.03)^4$ = 5,627.54

2ª. Anualidad al cabo de 3 años = 5,000.00 $(1.03)^3$ = 5,463.63

3ª. Anualidad al cabo de 2 años = 5,000.00 $(1.03)^2$ = 5,304.50

4ª. Anualidad al cabo de 1 año = 5,000.00 $(1.03)^1$ = 5,150.00

5ª. Anualidad al cabo de 0 años = 5,000.00 = 5,000.00

TOTAL $ 26,545.67

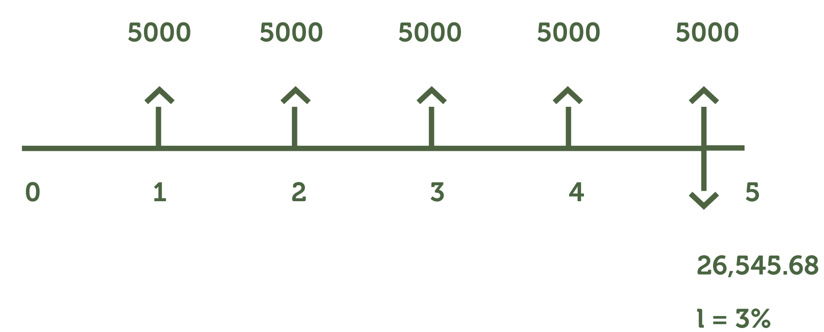
### Cálculo por fórmula

$$S_{\frac{n}{i}}\, R \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\} =$$

$$5{,}000.00 \left\{ \frac{(1+0.03)^5 - 1}{0.03} \right\} =$$

5,000.00 (5.309) = $ 26,545.67

### Diagrama financiero del caso



# Problema

**Recibimos un préstamo por $ 600,000.00 al 2% mensual, ¿cuánto hay que devolver al cabo de 8 meses**

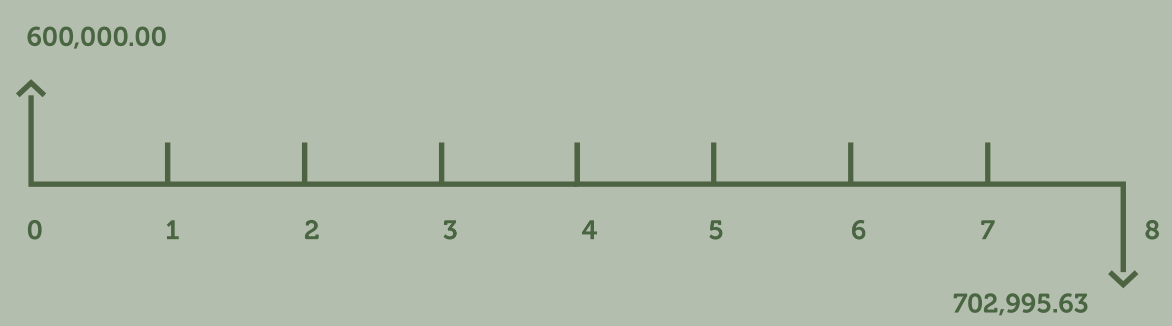
| MES | Inversión | Tasa | Monto | Capital |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 600,000.00 | 0.02 | 12,000.00 | 612,000.00 |
| 2 | 612,000.00 | 0.02 | 12,240.00 | 624,240.00 |
| 3 | 624,240.00 | 0.02 | 12,484.80 | 636,724.80 |
| 4 | 636,724.80 | 0.02 | 12,734.50 | 649,459.30 |
| 5 | 649,459.30 | 0.02 | 12,989.19 | 662,448.49 |
| 6 | 662,448.48 | 0.02 | 13,248.97 | 675,697.45 |
| 7 | 675,697.45 | 0.02 | 13,513.95 | 689,211.40 |
| 8 | 689,211.40 | 0.02 | 13,784.23 | 702,995.63 |
| | | | | 702,995.63 |

**Diagrama financiero del caso**

Si se tiene el auxilio de una calculadora financiera, todo este trabajo se realiza en cuestión de segundos, describiré a continuación los pasos a seguir, contando con la calculadora Hewlett-Packard 12C.

Se teclea 8n, 2i, 600000 PV Y FV y se obtiene el resultado 702,995.63

Si se requiere calcular cada paso, sin borrar lo anterior se toca:
1nFV y da 612,000.00
2nFV y da 624,240.00
3nFV y da 636,724.80
7nFV y da 689,211.40



# Problema

**Se invierten en la adquisición de un inmueble $ 3´500,000.00 y después de 3 años se vende este en la cantidad de $5´500,000.00. ¿Cuál es el interés ganado anual?**

**Solución con la calculadora**

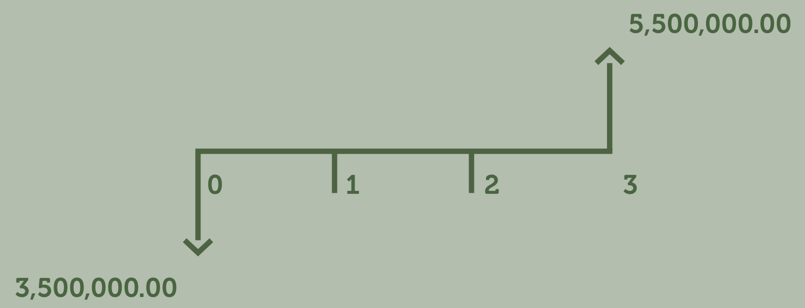
3 ENTER n

3´500,000 CHS PV

5´500,000 FV

I = 16.2603 %

**Diagrama financiero**




**Comprobación pasó a paso**

| Año | Inversión | Tasa | Monto | Capital |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,500,000.00 | 16.2603% | 569,110.50% | 4,069,110.50 |
| 2 | 4,069,110.50 | 16.2603% | 661,649.57% | 4,730,760.07 |
| 3 | 4,730,760.08 | 16.2603% | 769,235.78% | 5,499,995.86 |

# Problema

**Determinar el capital final de una inversión inicial de $ 1´000,000.00 a una tasa de interés del 10% anual, durante 5 años.**

## Diagrama financiero


5n, 10i, 1´000,000.00 CHS PV y luego VF
Que en este caso será de $ 1´610,510.00

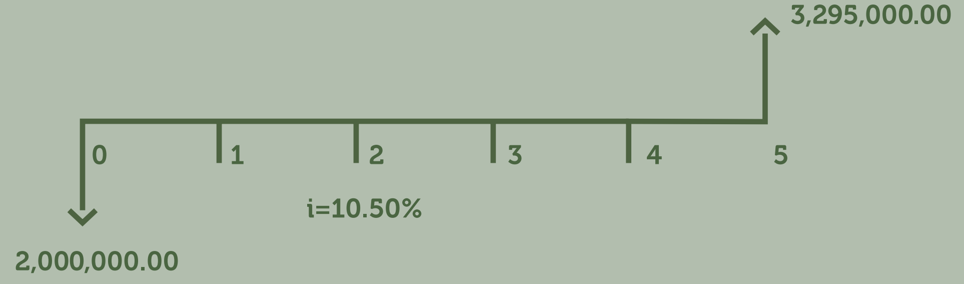
## Comprobación paso a paso

| Período | Capital inicial | Interés | Capital final |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,000,000.00 | 100,000.00 | 1,100,000.00 |
| 2 | 1,100,000.00 | 110,000.00 | 1,210,000.00 |
| 3 | 1,210,000.00 | 121,000.00 | 1,331,000.00 |
| 4 | 1,331,000.00 | 133,100.00 | 1,464,100.00 |
| 5 | 1,464,100.00 | 146,410.00 | 1,610,510.00 |
| | | | 1,610,510.00 |

Conviene aclarar que a la calculadora financiera se le debe limpiar la memoria para evitar errores en los cálculos, esto se hace prendiéndola, tocando f clx y luego g clx.

# Problema

**¿Qué tipo de interés será el que transforme un capital de $ 2´000,000.00 en $3´295,000.00 en 5 años?**




Haciéndolo con la calculadora, tenemos: 2’000,000.00 enter PV, 5n, 3´295,000.00 CHS FV y luego i, con lo que se obtiene: i = 10.50%. (nota: CHS significa cambio de signo.)

Si utilizamos la fórmula, $i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$

Interés o tasa periódica y haciendo las sustituciones tendremos:

$$i = \sqrt[5]{\frac{3'295,000}{2''000,000}} - 1 = 10.50\%$$

# Problema

**¿Qué tiempo habrá que tener invertido un capital de $ 9´500,000.00 para que al 12% de interés anual se transforme en $21´000,000.00?**

Con la calculadora financiera se tendrá: 9´500,000.00 enter PV, 12 i, 21´000,000.00 CHS, y luego n, con lo que la respuesta será: n = 7años.

Si se aplica la fórmula correspondiente:

$$n = \frac{\log \frac{F}{P}}{\log(1+i)}$$ Período o número de períodos

Se tiene que $$n = \frac{\log \frac{21'000,000}{9'500,000}}{\log(1+12)} = 7\ años.$$

Resolvamos a continuación algunos casos rápidos con la calculadora financiera, revisando capitalización, anualidades, descuentos y amortización.

# Problemas

**¿Cuál será el valor futuro de $ 5,000.00 si los deposito hoy al 10% durante 35 años?**

**(VF/VP, i, n) =** $(1+i)^n$ **; 35n, 10i, 5,000CHS VP y VF = $140,512.19**

**Calcular el valor presente de $10,000.00 que se van a recibir en 3 años a una tasa del 10%**

$(VP/VF,i,n)=\frac{1}{(1+i)^n}$**; 3n, 10i, 1000 FV y luego**

**VP = $ 751.31**

**Si depositamos $ 100,00 al final de cada año durante 20 años, ganando un interés del 10% anual, ¿Cuánto tendremos al final?**

$$(F/A,i,n)=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

**100 PMT, 20n, 10 i y luego FV = $ 5,727.50**

**¿Cuál es el valor presente VP de $15,000.00, recibidos al final del año durante 20 años al 10%?**

$$(VP/anualidad,i,n)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

**20n, 10i, 15,000 PMT, 0 VF y PV = $127,703.45**

# Problemas

¿Cuál es la anualidad requerida para acumular $ 100,000.00 en 30 años si los depósitos anuales ganan un 10% de interés?

$$(A/F,i,n)=\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$$

30n, 10i, 0 PV, 100,000 VF y PMT = $ 607.925

¿Cuál será el salario anual de un profesional de bienes raíces a lo largo de 20 años, si éste es financiado con un fondo de $ 1´000,000.00 que gana un interés del 10%?

$$\left((A/P,i,n)=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right)$$

20n, 10i, 1´000,000 CHS PV, 0 VF

y luego PMT =$117,459.62

# Problema teórico

**¿En cuánto tiempo se duplica una inversión sabiendo que la tasa nominal es del 12% capitalizable mensualmente?**

$$F = P(1+i)^n$$

$$F = 2P$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

$$2P = P(1+0.01)^n$$

log 2 = n log 1.01

$n = \frac{\log 2}{\log 1.01} = \frac{0.3010}{0.0043} = 70$ meses= 5.83 años

# Problema

**El propietario de un inmueble valuado en $ 4´000,000.00, recibe dos ofertas para su venta:**

**a) $1´000,000.00 de contado y 6 pagos trimestrales de $ 550,000.00, cada uno con una tasa nominal del 10%.**

**b) 20 pagos mensuales de $ 220,000.00 cada uno, efectuando el primer pago de inmediato con una tasa del 1% mensual.**

**¿Qué oferta es la mejor?**

Alternativa a)

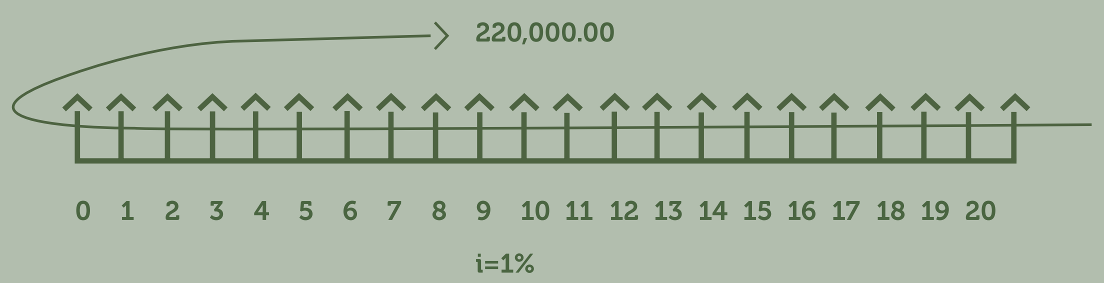
son 6 trimestres, luego si la tasa nominal es = 10%, el interés será 10/4 = 2.5%

Con la calculadora financiera y trabajando en modo final se tiene:

6n, 2.5i, 550000 PMT, 0 VF, VP = $ 3´029,468.90 más $1´000,000.00 de contado:

Total $ 4´029,468.90

Alternativa b)




g beg, 20n, 1i,220,000.00 PMT, 0 FV, VP = $ 4´009,721.90 La alternativa a) es la mejor de las dos.

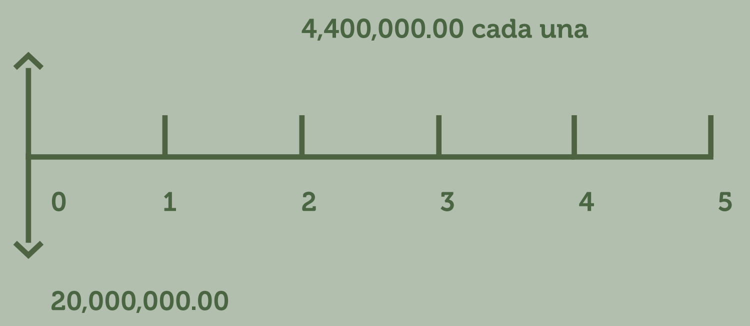
# Problema

**Se terminó de construir un conjunto de 5 casas en un condominio horizontal, la inversión que se hizo fue de $ 20,000,000.00. Si se venden las casas, cada una en $ 4´400,000.00 una cada mes, la primera de ellas al primer mes y las otras cada mes,**

**¿Cuál será el interés mensual? Y si se vende la primera casa desde el inicio de la venta**

**¿Cuál será el interés?**

F fin, g beg, 5n, 20´000,000 CHS PV, 4´400,000 PMT
y luego i = 3.2635%




f fin, g beg, 5n, 20´000,000 CHS PV, 4´400,000 PMT
y luego i = 5.006%

El interés fue mayor cuando se vende la primera casa desde el inicio.

# Problema

**Se contrae una deuda de $ 1´000,000.00, para pagarse en 5 años mediante pagos anuales.**

**Determinar el monto del pago anual (amortización), si el interés nominal (anual) será del 12% capitalizable anualmente.**

**Tabla de amortización**

| n | saldo | pago | interés | abono |
|---|---|---|---|---|
| | 1´000,000(1+i) - PMT | | saldo por i | saldo-saldo |
| 0 | 1,000,000.00 | 277,410.00 | 120,000.00 | 157,410.00 |
| 1 | 842,590.00 | 277,410.00 | 101,110.80 | 176,299.20 |
| 2 | 666,290.00 | 277,410.00 | 79,954.80 | 197,455.20 |
| 3 | 468,830.00 | 277,410.00 | 56,259.60 | 221,150.40 |
| 4 | 247,680.00 | 277,410.00 | 29,721.60 | 247,688.40 |
| 5 | | 277,410.00 | 0.00 | |

Cálculo con la calculadora financiera

5n, 12i, 1´000,000PV, y PMT = 277,409.73

# Problema

**Un préstamo de $ 1´000,000.00 a pagarse en 10 años con un interés del 6% anual**

**¿Cómo puede amortizarse?**

Existen varias posibilidades, veamos cuáles son y cuál resulta la mejor.

1. Pagando $ 100,000.00 anuales más sus intereses.

2. Pagando intereses y liquidando al final todo.

3. Haciendo pagos anuales (PMT) con sus respectivos intereses.

4. Pagando al final.

Pagando $ 100,000.00 anuales más intereses.

**Tabla de amortización**

| al final del año | interés 6% | adeudo del pago | pago al fin del año | adeudo después del pago |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 1 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 2 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 3 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 4 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 5 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 6 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 7 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 8 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 9 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 1,000,000.00 |
| 10 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 60,000.00 | 0.00 |
| **pago total** | | | | 1,600,000.00 |

| al final del año | interés 6% | adeudo del pago | pago al fin del año | adeudo después del pago |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 1,000,000.00 |
| 1 | 60,000.00 | 1,060,000.00 | 0.00 | 1,060,000.00 |
| 2 | 63,600.00 | 1,123,600.00 | 0.00 | 1,123,600.00 |
| 3 | 67,416.00 | 1,191,916.00 | 0.00 | 1,191,916.00 |
| 4 | 71,461.00 | 1,262,477.00 | 0.00 | 1,262,477.00 |
| 5 | 75,749.00 | 1,338,226.00 | 0.00 | 1,338,226.00 |
| 6 | 80,294.00 | 1,418,520.00 | 0.00 | 1,418,520.00 |
| 7 | 85,111.00 | 1,503,631.00 | 0.00 | 1,503,631.00 |
| 8 | 90,218.00 | 1,593,849.00 | 0.00 | 1,593,849.00 |
| 9 | 95,631.00 | 1,689,480.00 | 0.00 | 1,689,480.00 |
| 10 | 101,369.00 | 1,790,849.00 | 1,790,800.00 | 0.00 |
| **pago total** | | | | 1,790,800.00 |

Haciendo pagos anuales con sus intereses PMT

Pagando al final.

Conclusión, la forma más conveniente de pagar es Pagando al Final.

# Problema

**Cuál será el valor de compra de una casa, si sabemos que va a dejarnos una renta neta de $3000.00/mensual, para que nuestra inversión nos produzca un interés anual del 10% anual. Y lo vendo a 15 años considera el mismo valor de compra.**

$$vp = vf = ?$$

$$n = 15$$

$$i = 10\% \; anual$$

$$pmt = \$\ 3000.00$$

Si $i = 10\%$ anual nominal capitalizable amortizable más el de renta

$$i = 0.83\% \; mensual$$

$$i = \frac{0.10}{12} = 0.0083$$

$$valor = \frac{300}{0.0083} = 361,445.78 \approx 360,000.00$$

# Problema

**El propietario de un inmueble valuado en $400,000.00 recibe las siguientes ofertas:**

**$100,000.00 de contado y 6 pagos trimestrales de $55,000.00c/u con una tasa nominal del 10%**

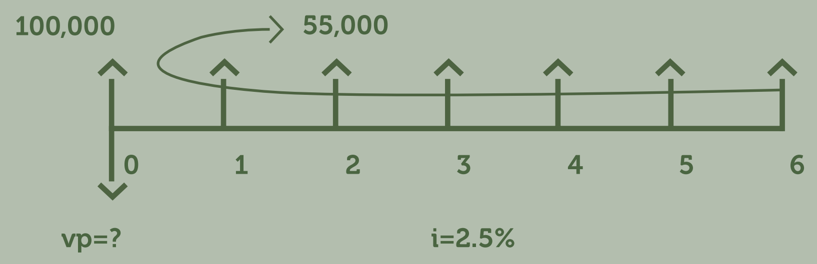
**20 pagos mensuales de $22,000.00 c/u efectuando el primer pago de inmediato con una tasa del 1% mensual.**

a) ¿Qué oferta es mejor?

Son trimestres $(6)$

Tasa nominal $v = 10\%$

Como es trimestral $\frac{10}{4} = 25\%$

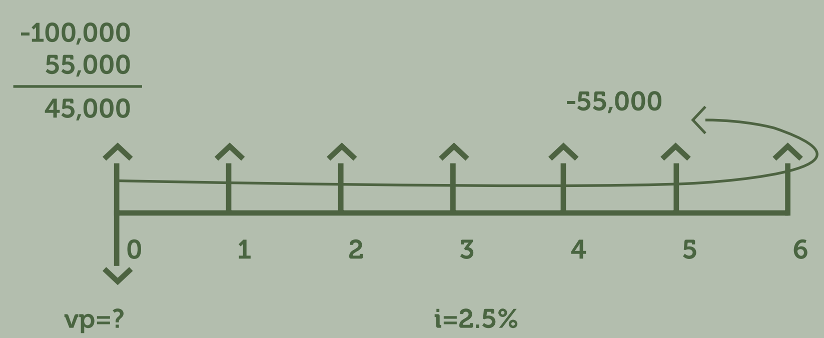


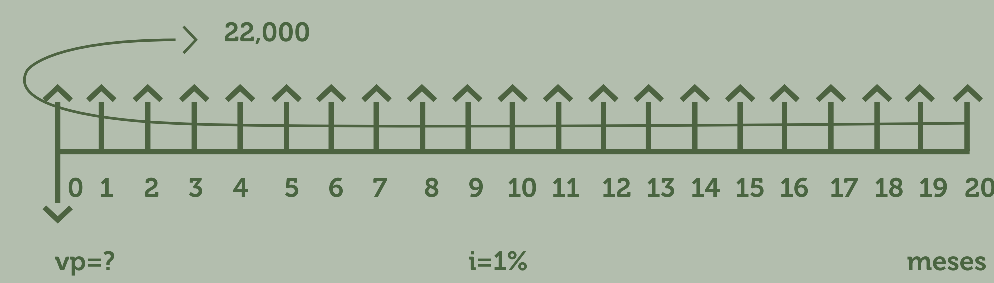

Cálculo con la calculadora financiera

Modo final, 6n, 2.5i, 55,000 PMT ó VF,

VP=302,946.89
Más $100,000.00
Total= $402,946.89

Si se quiere calcular con modo inicial




Cálculo con la calculadora financiera

g beg, 7n, 2.5i, 55000PMT ó FV.

VP=-357,946.89
Mas 45.000
Total= $ 402,946.89

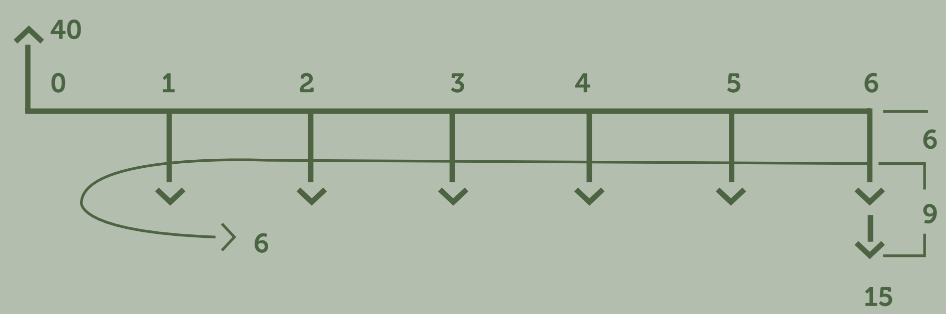
Cálculo con la calculadora financiera

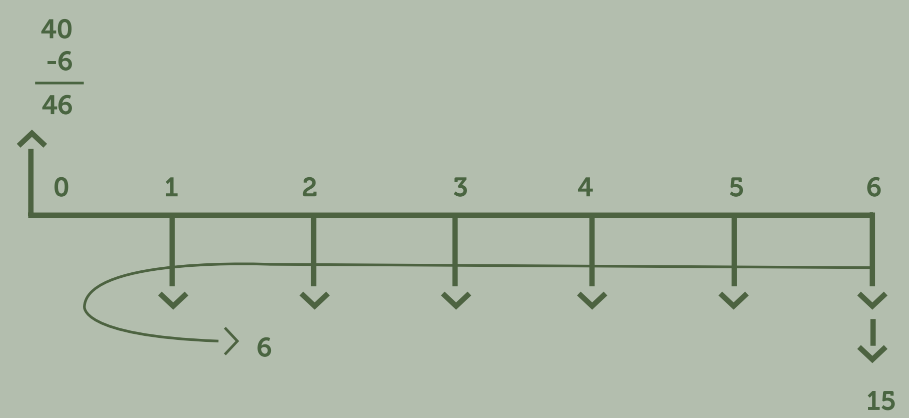
g beg, 20n, 1i, 22000pmt ó FV.

VP=400972.19

Respuesta = la opinión a) es mejor que la b)

Determinar la tasa de rendimiento




Cálculo con la calculadora financiera

6n, 40 PV, 6 CHS PMT, 9 CHS VF, I=3.02%

Ahora, con pagos al principio, mediante el corrimiento de los P.M.T.

Cálculo con la calculadora financiera

g beg, 6n, 46PV, 6CHS PMT, 15 CHS VF, I=3.02%

# Problema

**Determinar el valor de la construcción del inmueble que tiene las siguientes características**

**Renta bruta: $2,000m2**
**VUM= $250.00/m2**
**Renta bruta mensual = $22,000.00**
**Deducciones 30%**
**Tasa neta de capital= 9%**
**Edad 10 años**
**Vida útil total = 60 años**

$$a = \frac{1}{n} = \frac{1}{50} = 0.02$$

$$RNA = (RBM - deducciones)12 = (22,000 \times 0.70)12 = 184,800.00$$

$$V.Capital = \frac{184800}{0.09} = 2,053,333.34$$

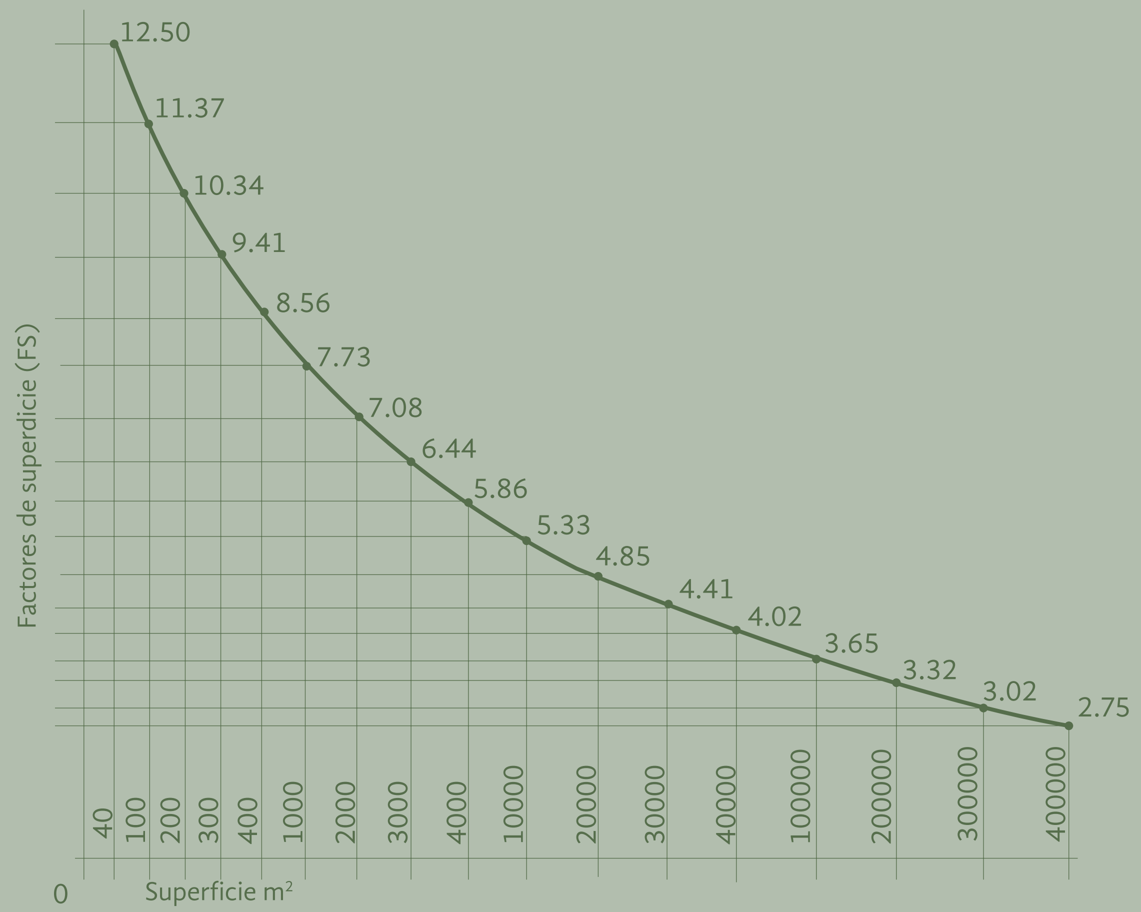
$$ahora: \qquad C = \frac{RNA - Ttn}{tnta} = \frac{184800 - (500,000 \times 0.09)}{0.09 + 0.02}$$

$$C = \frac{184800 - 45000}{0.11} = \frac{139800}{0.11} = 1,270,909.09$$

# Problema

**Manejo de una función logarítmica para el cobro de honorarios profesionales por proyecto arquitectónico de superficies construidas y de porcentaje de honorarios según el colegio de Arquitectos de la Ciudad de México de 1990.**

Con esta grafica se demuestra una aplicación de función logarítmica al tener como asíntota a los ejes de coordenada.



$$FSx = \frac{(Sx - LSa)\ (FSb - FSa)}{(LSb - LSa)} + FSa$$

**Sx** Superficie construida del proyecto
**LSa** Límite de la superficie menor más próxima a Sx
**LSb** Límite de la superficie mayor mas aproximada a
**FSa** Factor de superficie correspondiente a
**FSb** Factor de superficie correspondiente a
**FSx** Factor de superficie correspondiente a factor de superficie para mayor a los $400.00m^2$

$$FSx = 2.75 = \frac{2.40\ (\log\ Sx)}{100}$$

$$HONORARIOS : H = \frac{(FSx)(CD)}{100}$$

# Problema

### Promedio de puntuación adecuado

**En el taller de arquitectura de la facultad se tiene que determinar la calificación final de los alumnos, pero para determinar la calificación final de los alumnos intervienen 4 asignaturas que participan para dar la nota final.**

Las asignaturas son proyectos con función investigación y geometría y las respectivas calificaciones son 82, 86, 90 y 70.

Si se le asigna una importancia a cada una, por ejemplo, 4 a proyectos, 3 a construcción, 1 a geometría y 2 a investigación, ¿cuál será el promedio de puntuación adecuado?

$$\overline{X} = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{4(82)+3(86)+1(90)+2(70)}{4+3+1+2} =$$

$$\overline{X} = \frac{328+258+90+140}{10} = \frac{816}{10} = 8.16$$

Es decir, la calificación final será de 8 que es la media ponderada.

## Cálculo de media, mediana y moda

# Problema

**Hallar la media, mediana y la moda de los siguientes números. y 3, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 8 y 9**

Media= $\frac{1}{10}\left(3+3+34+5+5+5+7+7+8+9\right)=5.6$

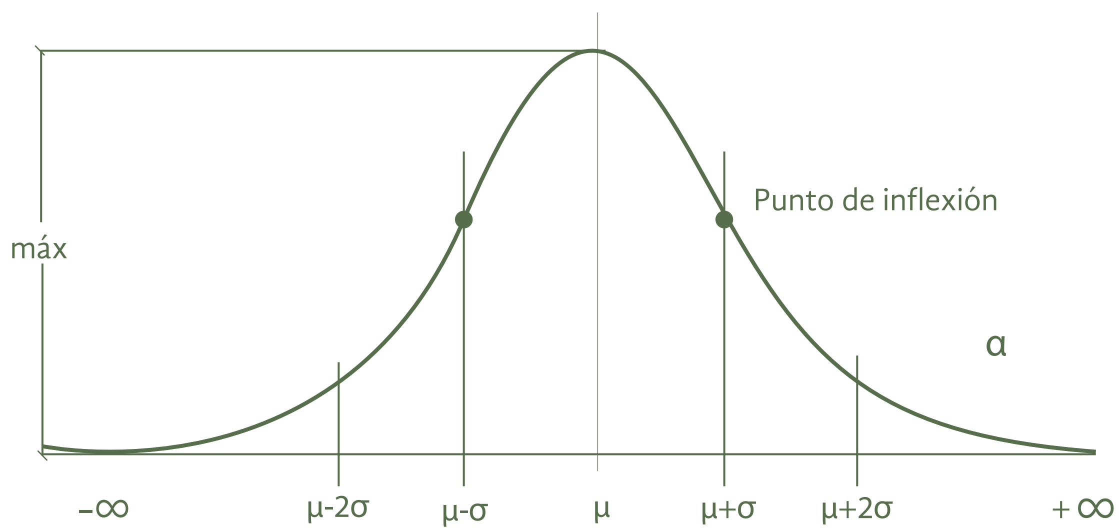
Media= media aritmética de los 2 valores centrales= $\frac{1}{2}\left(5+5\right)=5$

Moda= número que se presenta con mayor frecuencia= 5

Si nos asomamos un poco a la probabilidad, conviene recordar algunos conceptos.

# Campana de Gauss

## (Carl Friedrich Gauss 1777-1855)




Es una función especial muy útil para comprender la probabilidad de la ocurrencia de algunos hechos.

El eje $X' \ X$ es asíntota de la curva en el infinito, es decir, tangente a ella en $-\infty$ y en $+\infty$.

El área bajo la curva se considera igual a **1** (uno) y entonces el campo de existencia es cualquier valor real entre $(-\infty, +\infty)$.

La curva es simétrica con respecto a la media $\mu$ y alarga su punto máximo en la media $\mu$ ; $(x = \mu)$

Para una variable aleatoria continua **x**, sigue una distribución normal de media $\mu$ y una desviación típica $\sigma$ y se designa por $N(\mu, \sigma)$.

La función esta expresada en la ecuación matemática de la campana de Gauss

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Llamada función de densidad en la que

$\mu = media$

$\sigma = desviación\ física$

$\sigma^2 = varianza$

$\pi = 3.1416$

$e = 2.7182$

La curva crece desde $-\infty$ hasta la media $\mu$ y a partir de ella decrece hasta $+\infty$.

En los puntos y se localizan los puntos de inflexión.

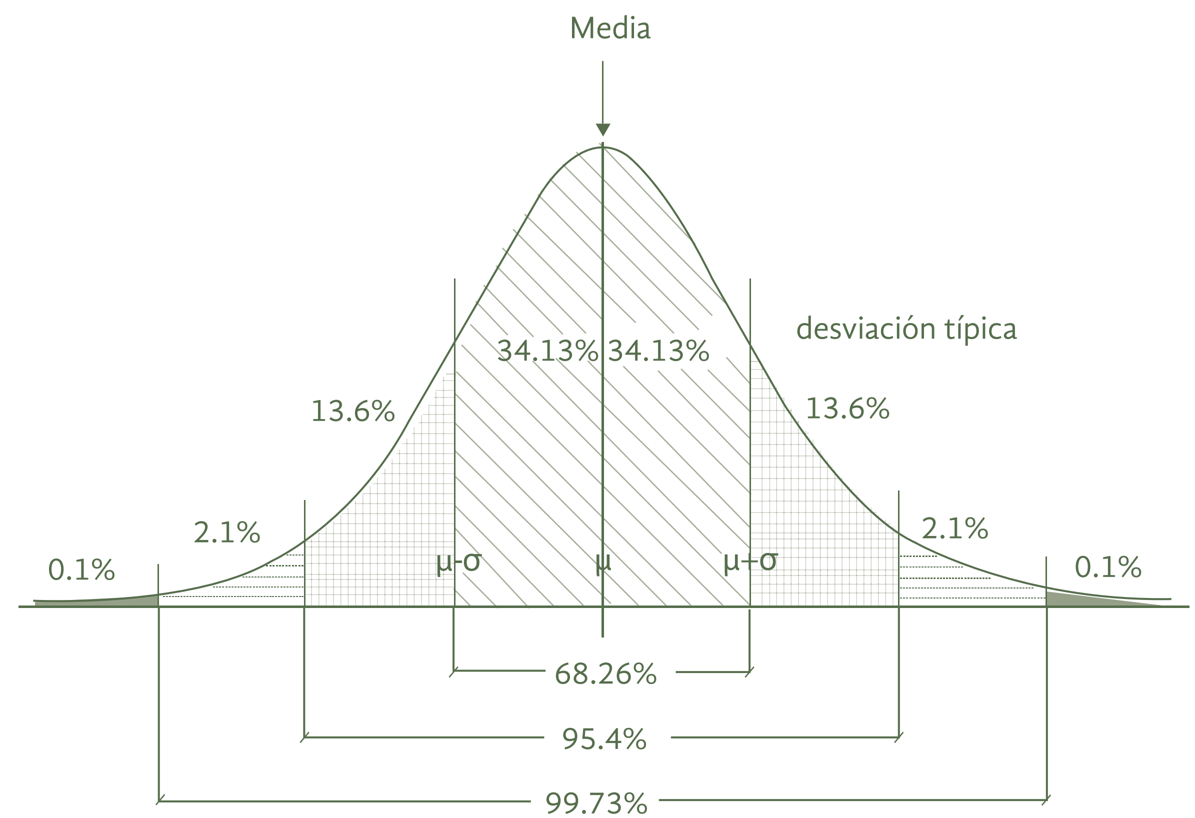
Al ser simétrica con respecto al eje vertical que pasa por y deja un área igual a **0.05** a la izquierda y de **0.5** a la derecha, lo que significa que hay la probabilidad de un **50%** de observar un dato menor.

Determinar áreas bajo la curva equivalente a la probabilidad.

$p(\mu-\sigma\langle x \le \mu+\sigma) = 0.6826 \quad ó \quad sea\ 68.26\%$ Desviación típica

$p(\mu-2\sigma\langle x \le \mu+2\sigma) = 0.9545 \quad ó \quad sea\ 95.45\%$ Desviación estándar

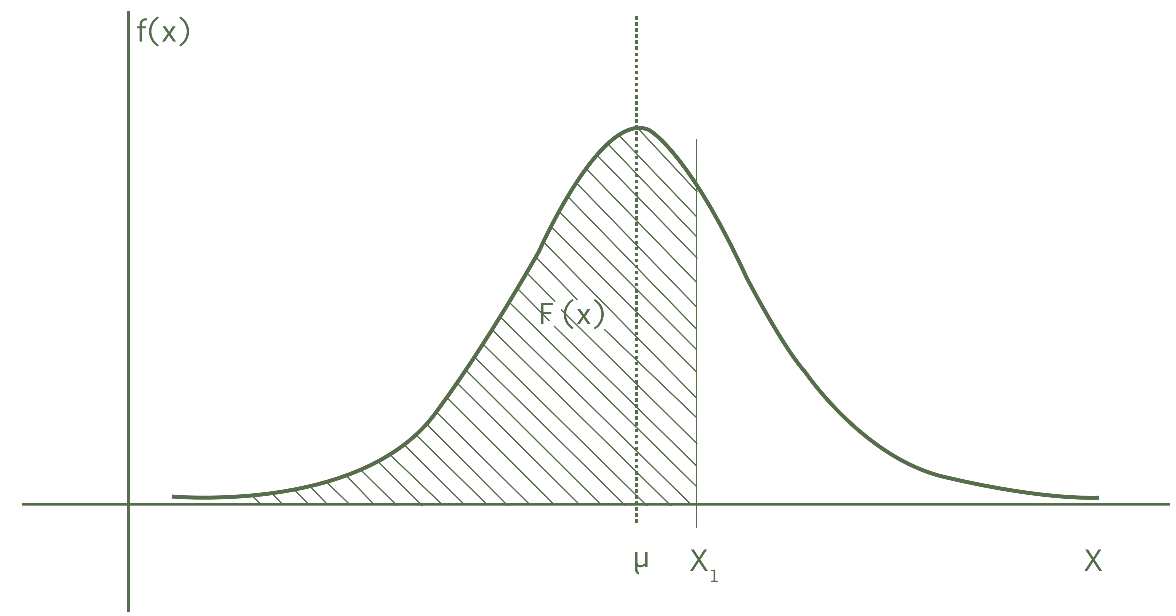
$p(\mu-3\sigma\langle x \le \mu+3\sigma) = 0.9973 \quad ó \quad bien\ 99.73\%$



# Función de distribución

$$F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x-\mu\right)^{2}}{2\pi^{2}}}dx$$

$F\left(x\right)$ es el área sombreada en la gráfica



# Problema

**Hallar la probabilidad para** $x \leq 0.45$

Para calcularla podemos utilizar la tabla de distribución normal con valor ya calculado.

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8930 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9561 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.8917 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |

En la primera columna **x**, se busca el valor de las unidades y sus decimales.

Y en la fila superior las centésimas, donde se cruzan los valores estará la probabilidad.

$$p = (x \leq 0.45) = 0.6736$$

# Capítulo 9



Índice

# Equivalencias

También en la práctica profesional se enfrenta el arquitecto a realizar cierto tipo de cálculos que implican el manejo de unidades que requiere conocer equivalencias para realizarlos correctamente; por ello, a continuación relaciono los más comunes factores de conversión que sin duda serán de mucha utilidad.

## Tiempo

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| días | 24 | horas |
| días | 1440 | minutos |
| días | 86,400 | segundos |
| horas | $4.167 \times 10^{-2}$ | días |
| horas | 60 | minutos |
| horas | 3600 | segundos |
| horas | $5.952 \times 10^{-3}$ | semanas |
| minutos | $6.944 \times 10^{-4}$ | días |
| minutos | $1.667 \times 10^{-2}$ | horas |
| minutos | $9.921 \times 10^{-5}$ | semanas |
| segundos | $1.157 \times 10^{-5}$ | días |
| segundos | $2.778 \times 10^{-4}$ | horas |
| segundos | $1.667 \times 10^{-2}$ | minutos |
| segundos | $1.654 \times 10^{-6}$ | semanas |
| semanas | 168 | horas |
| semanas | 10,080 | minutos |
| semanas | 604,800 | segundos |

## Peso

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| kilogramos | $10^{3}$ | gramos |
| kilogramos | 2.2046 | libras |
| kilogramos | 980,665 | dynas |
| gramos | 980.7 | gynas |
| gramos | $10^{-3}$ | kilogramos |
| gramos | $10^{3}$ | miligramos |
| gramos | 0.03527 | onzas |
| gramos | $2.205 \times 10^{-3}$ | libras |
| libras | 453.6 | gramos |
| libras | 16 | onzas |
| libras | 0.4536 | kilogramos |
| kilogramos | $10^{-3}$ | toneladas |
| toneladas | $10^{3}$ | kilogramos |
| toneladas | 2205 | libras |
| onzas | 28.35 | gramos |
| onzas | 0.0625 | libras |

# Volumen

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| litros | 0.2642 | galones |
| litros | $10^{-3}$ | metros cúbicos |
| litros | $10^{3}$ | cms. cúbicos |
| metros cúbicos | $10^{3}$ | litros |
| metros cúbicos | 264.2 | galones |
| galones | 3785 | cms. cúbicos |
| galones | 3.785 | litros |
| galones | 3.785 x 10-3 | metros cubicos |
| metros cúbicos | 35.3145 | pies cúbicos |
| metro cúbico | 1.307905 | yarda cúbica |
| pie cúbico | 0.028316 | metro cúbico |

# Longitud

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| metros | 100 | centímetros |
| metros | 3.281 | pies |
| metros | 39.37 | pulgadas |
| metros | $10^{-3}$ | kilometros |
| metros | $6.214 \times 10^{-4}$ | millas |
| metros | $10^{3}$ | milímetro |
| metros | 1.094 | yardas |
| centímetros | 0.01 | metros |
| centímetros | $3.281 \times 10^{-2}$ | pies |
| centímetros | 0.3937 | pulgadas |
| centímetros | 10 | milímetros |
| centímetros | $6.214 \times 10^{-6}$ | millas |
| kilometros | $10^{5}$ | centímetros |
| kilometros | 3281 | pies |
| kilometros | $10^{3}$ | metros |
| kilometros | 0.6214 | millas |
| kilometros | 1094 | yardas |
| yardas | 91.44 | centímetros |
| yardas | 3 | pies |
| yardas | 36 | pulgadas |
| yardas | 0.9144 | metros |
| yardas | $5.682 \times 10^{-4}$ | millas |
| pulgadas | 2.54 | centímetros |

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| pulgadas | $2.54001 \times 10^{-2}$ | metros |
| pulgadas | $8.333 \times 10^{-2}$ | pies |
| pulgadas | $2.778 \times 10^{-2}$ | yardas |
| pies | 30.4801 | centímetros |
| pies | 0.304801 | metros |
| millas terrestres | 1.60935 | kilometros |
| millas terrestres | 0.8684 | millas nauticas |
| millas nauticas | 1.85325 | kilometros |
| millas nauticas | 1.1516 | millas terrestres |

# Superficie

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| acres | 0.404687 | hectareas |
| acres | $4.04687 \times 10^{-3}$ | kilometros cuadrados |
| hectareas | 2.47104 | acres |
| hectareas | $1.076387 \times 10^{5}$ | pies cuadrados |
| pies cuadrados | $9.29034 \times 10^{-6}$ | hectareas |
| pies cuadrados | 0.929034 | metros cuadrados |
| millas cuadradas | 2.590 | kilometros cuadrados |
| millas cuadradas | 259 | hectareas |
| hectareas | 10000 | metros cuadrados |
| metros cuadrados | 0.0001 | hectareas |
| metros cuadrados | 10.7639104 | pies cuadrados |
| metros cuadrados | 1.19599 | yardas cuadradas |
| yardas cuadradas | 0.83613 | metros cuadrados |
| pulgadas cuadradas | 6.45163 | centímetros cuadrados |
| milímetros cuadrados | 0.001550 | pulgada cuadrada |

# Energía, trabajo y calor

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| british thermal units | $3.930 \times 10^{-4}$ | hp-hora |
| btu | 1055 | joules |
| btu | 0.2520 | kilo-calorías |
| btu | 107.6 | kilos-metro |
| btu | $2.930 \times 10^{-4}$ | kilo watts-hora |
| erg | $9.480 \times 10^{-11}$ | btu |
| erg | $10^{-7}$ | joules |
| erg | $2.389 \times 10^{-11}$ | kilo-calorías |
| erg | $1.020 \times 10^{-8}$ | kilos-metro |
| horse-power | 42.40 | btu/minuto |
| hp | 10.68 | kilo-cal/ minuto |
| hp | 0.7457 | kilowatts |
| joules | $9.480 \times 10^{-4}$ | btu |
| joules | 107 | ergs |
| joules | $2.389 \times 10^{-4}$ | kilocalorías |
| caloría | 4.187 | joules |
| kilo-calorías | 3.968 | btu |
| kilo-calorías | 4187 | joules |
| kilo-calorías | $1.163 \times 10^{-3}$ | kilowatt-hora |
| kilo-calorías | $1.560 \times 10^{-3}$ | hp-hora |
| kilowatts | 56.88 | btu-hora |
| kilowatts | 1.341 | hp |

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| kilowatts | $10^3$ | watts |
| kilowatt-hora | 3413 | btu |
| kilowatt-hora | 1.341 | hp-hora |
| kilowatt-hora | $3.6 \times 10^6$ | joules |
| kilowatt-hora | $3.6 \times 10^6$ | kilo-calorías |
| kilogramo-fuerza | 9.8 | newtons |
| newton | 0.10197 | kilogramos |
| kilogramo-fuerza | 9.8 | newtons |
| newton | 0.10197 | kilogramos |
| toneladas-metro | 1000 | kilos-metro |
| toneladas-metro | 100000 | kilos-centímetro |
| megapascal | 10 | $kg/cm^2$ |
| megapascal | 1 | $n/mm^2$ |
| megapascal | 10197 | kg fuerza/$cm^2$ |

$$1Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{J}{m^3} = \frac{kg}{mseg^2}$$

$1\frac{kg}{cm^2} = 98060$ Pascales = 0.09860 Mega pascales

# Ángulos

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| grados | 60 | minutos |
| grados | 0.01745 | radianes |
| grados | 3600 | segundos |
| minutos | $2.909 \times 10^{-4}$ | radianes |
| minutos | 60 | segundos |
| radianes | 57.30 | grados |
| radianes | 3438 | minutos |
| segundos | $4.848 \times 10^{-6}$ | radianes |

# Velocidad

| unidad | multiplicar por | para obtener |
|---|---|---|
| kilometro / hora | 0.6214 | millas / hora |
| metro / segundo | 3.2803 | pie / segundo |
| milla / hora | 1.6093 | kilometro /hora |
| pie / segundo | 0.3048 | metro / segundo |
| pulgada / segndo | 0.0254 | metro / segundo |

# Varillas

## Dimensiones y pesos

| varilla no. | diámetro mm. y pulgs. | perímetro mm. | área $cm^2$ | peso en $kg/m^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 6.4 (1/4”) | 20.1 | 0.323 | 0.251 |
| 2.5 | 7.9 (5/16”) | 24.8 | 0.490 | 0.384 |
| 3 | 9.5 (3/8”) | 29.8 | 0.710 | 0.557 |
| 4 | 12.7 (1/2”) | 39.9 | 1.270 | 0.996 |
| 5 | 15.9 (5/8”) | 50.0 | 1.99 | 1.560 |
| 6 | 19.1 (3/4” | 60.0 | 2.87 | 2.250 |
| 7 | 22.2 (7/8”) | 69.7 | 3.87 | 3.034 |
| 8 | 25.4 (1”) | 79.8 | 5.07 | 3.975 |
| 9 | 28.6 (11/8”) | 89.8 | 6.42 | 5.033 |
| 10 | 31.8 (11/4”) | 99.9 | 7.94 | 6.225 |
| 12 | 38.1 (11/2”) | 119.7 | 11.40 | 8.938 |

# Bibliografía

Ayres, Frank Jr. *Matrices*. Luis Gutiérrez Díez y Angel Gutiérrez Vázquez trads. Ciudad de México: McGraw-Hill, 1969.

Carmona y Pardo, Mario de Jesús. *Matemáticas para Arquitectura*. Ciudad de México: Editorial Trillas, 2008.

Carmona y Pardo, Mario de Jesús. *Estática en Arquitectura*. Ciudad de México: Editorial Trillas, 2007.

Farías Arce, Rafael. *Apuntes de Matemáticas*. Ciudad de México: Escuela Nacional de Artes-Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

Fuenlabrada De La Vega Trucios, Samuel. *Cálculo Diferencial*. Ciudad de México, McGraw-Hill, 1995.

Fuenlabrada De La Vega Trucios, Samuel. *Cálculo Integral*. Ciudad de México: McGraw-Hill, 1998.

Hudson S. B. Ralph G. *The Engineers´ Manual*. Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1961.

*Manual Para Constructores*. Monterrey: Fundidora de Fierro y Acero de Monterrey, S.A. 1965.

*Manual técnico de accesibilidad*. Ciudad de México: Secretaría de Derrollo Urbano y Vivienda, consignar año de publicación.

Peschard Delgado, Eugenio. *Resistencia de Materiales*. Ciudad de México, Facultad de Arquitectura-Universidad Nacional Autónoma de México, 1992.

KURT GIECK / REINER GIENCK, *Manual de Fórmulas Técnicas*, Alfa omega.